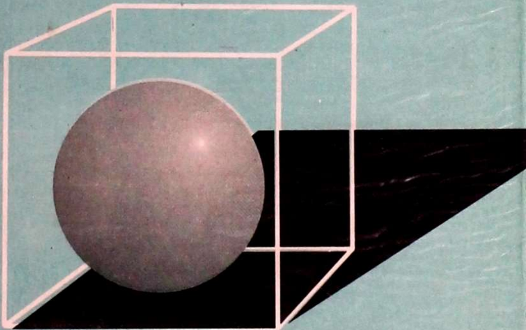
К. М. Төрөгелдиева

МАТЕМАТИКАНЫН ТАРЫХЫ



К. М. ТӨРӨГЕЛДИЕВА

МАТЕМАТИКАНЫН ТАРЫХЫ

Жогорку окуу жайларынын студенттери үчүн окуу китеби

Кыргыз Республикасынын билим жана маданият министрлиги бекиткен

БИШКЕК 2003

ББК 22.1
Т—64

Төрөгелдиева Коңуржан Макишевна

Т—64 **Математиканын тарыхы**. — Б., 2003. 228 б.

ISBN 9967-21-706-1

Бул окуу китеби «Математиканын тарыхы» боюнча түзүлгөн программанын негизинде жазылды. Математиканын тарыхы боюнча алгачкы китеп. Математиканын тарыхы боюнча башка китептерден айырмасы, математика боюнча орто мектепте каралуучу материалдардын тарыхы системалуу түрдө бөлүмдөргө бөлүнүп берилди. ЭЭМ дин өнүгүү шартына байланыштуу, математиканын негизги өнүгүү мезгилдери шарттуу түрдө 5 ке бөлүнүп каралды. Ошондой эле Кыргыз Республикасындагы математиканын өнүгүү тарыхы жөнүндө да маалыматтар бар.

Китеп педагогикалык университеттин студенттерине, орто мектептин математик мугалимдерине жана математиканын тарыхына кызыгуучуларга арналат.

Т $\frac{1602000000}{451(11)\ 2003}$ 2003 ББК 22.1

ISBN 9967-21-706-1

КИРИШ СӨЗ

Математика илиминин тарыхын жана анын методологиялык негиздерин үйрөтүү келечектеги математик мугалимдерин даярдап чыгаруучу педагогикалык жогорку окуу жайларынын негизги милдеттеринин бири болуп эсептелинет. Илимдин тарыхын жана өнүгүүсүн билбегендик бул илимдин келечегин билбөө болуп саналат.

«Математиканын тарыхы» окуу китебинин максаты жогорудагы маселелерди чечүү болуп саналат. Ошондой эле студенттерге математиканын өнүгүү тарыхын үйрөтүү менен келечектеги математик мугалимдеринин математика предметин окутууда пайдалануусуна багыт берет.

Жогорудагы максатты иш жүзүнө ашыруу үчүн бул курс төмөндөгү маселелерди чечүүсү зарыл:

— математиканын илим катары негизделишинин этаптарын жана методологиялык негизин студенттерге берүү;

— математикалык теориялардын негизделишинин тарыхын берүү;

— математикалык символдордун пайда болуу тарыхы;

— кээ бир улуу математиктердин математика илимине кошкон салымдарын көрсөтүү.

Математиканын тарыхы окуу китеби 7 бөлүмдөн турат.

1. Математиканын тарыхы предмети жана анын негизги өнүгүү мезгилдери.
2. Арифметиканын өнүгүү тарыхы.
3. Алгебранын өнүгүү тарыхы.
4. Алгебра жана анализдин башталышынын өнүгүү тарыхы.
5. Геометриянын өнүгүү тарыхы.
6. Тригонометриянын өнүгүү тарыхы.
7. Тарыхый маселелер.

Биринчи «Математиканын тарыхы предмети» бөлүмүндө, математиканын тарыхы предмети, анын методологиялык негиздери жана негизги өнүгүү мезгилдери берилди.

Экинчи «Арифметиканын өнүгүү тарыхы» бөлүмүндө, эсептөөнүн жана номерлөөнүн пайда болушу жана өнүгүшү, эсептөө системалары, байыркы эсептөө каражаттары жана алардын өркүндөтүлүшү, арифметикалык амалдардан тарыхы, бөлчөк сандардын пайда болушу каралды.

Үчүнчү «Алгебранын өнүгүү тарыхы» бөлүмүндө төмөндөгү темалар берилди: Алгебранын пайда болуу тарыхы. Алгебранын тамга символикасы. Биринчи даражадагы теңдемелер жана теңдемелер системасы. Квадраттык теңдемелер. Алгебранын XVIII кылымдан кийинки өнүгүүсү.

Төртүнчү «Алгебра жана анализдин башталышынын өнүгүү тарыхы» бөлүмүндө төмөндөгү темалар берилди.

Сан түшүнүгүнүн өнүгүшү. Байыркы грек математикасында чексиздик идеясынын пайда болушу. Функция жана предел түшүнүктөрүнүн тарыхы. Туунду, интеграл жана интегралдык эсептөөлөр. Комбинаториканын элементтери жана Ньютондун биному. Кыргыз Республикасындагы дифференциалдык, интегралдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелер боюнча изилдөөлөр.

Бешинчи «Геометриянын өнүгүү тарыхы» бөлүмүндө төмөндөгү темалар берилди: Геометриянын алгачкы түшүнүктөрү. Кээ бир геометриялык терминдердин жана геометриялык түшүнүктөрдүн тарыхы. Байыркы атактуу үч маселе. Стереометрия жөнүндө алгачкы түшүнүктөр. Туура көп грандыктар. Айлануу телолору. Геометриянын андан ары өнүгүшү.

Алтынчы «Тригонометриянын өнүгүү тарыхы» бөлүмүндө, тригонометриянын пайда болушу, тригонометриялык формулалар, функциялар жана алардын өнүгүшү каралды.

Жетинчи бөлүмдө тарыхый математикалык маселелер, оюндар чыгарылыштары менен берилди жана ар бөлүмдөр боюнча чыгарууга көнүгүүлөр сунуш кылынды.

Берилген көнүгүүлөргө жооптор жана көрсөтмөлөр берилди.

I Бөлүм

МАТЕМАТИКАНЫН ТАРЫХЫ ПРЕДМЕТИ ЖАНА АНЫН НЕГИЗГИ ӨНҮГҮҮ МЕЗГИЛДЕРИ

Бул бөлүмдүн максаты «Математиканын тарыхы» курсунун илимий негиздерин берүү. Ошондой эле курстун башка илимдер менен болгон байланыштары жана анын өнүгүү процесстери илимий негизде каралат. Математиканын өнүгүүсүндө практиканын ролу жана математиканын өнүгүүсүнүн негизги мезгилдери берилет.

1.1. МАТЕМАТИКАНЫН ТАРЫХЫ ПРЕДМЕТИ

Математиканын бардык бөлүктөрү алардын жалпы мүнөздөрү менен байланышкан. Бул жалпы мүнөзү — чыныгы дүйнөнүн мейкиндиктик формаларын жана сандык катыштарын үйрөтүүчү илим экендиги. Бул аныктаманы Ф. Энгельс берген. Математиканын ар кандай бөлүктөрү сандык катыштардын жана мейкиндиктик формалардын өзгөчөлөнгөн методдору менен айырмаланышат. Математиканын бул жалпы аныктамасы техниканын жана табият таануунун сандык катыштарга жана мейкиндиктик формаларга койгон талаптарынын өсүүсүнө байланыштуу улам бай мазмунга ээ.

Математика илими башка илимдер сыяктуу эле төмөндөгү элементтерден турат:

1) өзүнүн өнүгүүсүндөгү чогулган **фактылардан;**

2) **гипотезалардан,** б. а. андан ары тажрыйба менен текшерүүнү талап кылган, илимий ой-жүгүртүүлөрдөн;

3) берилген материалдардын фактыларынын жалпыланган жыйынтыгынан, б.а. **математикалык закондордон жана теориялардан;**

4) **математиканын методологиясынан** б.а. математика предметин мүнөздөөчү жалпы математикалык закондор жана теориялар, аны үйрөнүүдөгү жалпы мамиле.

Бул элементтер бири-бири менен тыгыз байланышта жана дайыма өнүгүүдө.

«Математиканын тарыхы» бул математиканын өнүгүүсүнүн объективдүү закондору жөнүндөгү илим.

Ошону менен бирге тарыхый-математикалык изилдөөлөр төмөндөгү багыттарда жүргүзүлөт:

1) тарыхый-математикалык изилдөөлөрдө, математикалык түшүнүктөрдүн, идеялардын, методдордун жана айрым математикалык теориялардын пайда болушу каралат. Айрым өлкөлөрдө математиканын өнүгүүсү жана окумуштуулардын математика илимине кошкон салымдары берилет;

2) тарыхый-математикалык изилдөөлөрдө математиканын көп кырдуу байланыштары каралат. Алар адамдардын күндөлүк практикалык керектөөсүн ишке ашыруудагы жасаган кыймыл аракеттери, чыгармачылыгы, башка илимдер менен көп кырдуу байланышы. Ошондой эле математиканын өнүгүү тарыхына коомдун структуралык түзүлүшүнүн, айрым окумуштуулардын тийгизген таасири каралат;

3) тарыхый — математикалык изилдөөлөр азыркы математика илиминин диалектикалык өнүгүүсүн түшүнүүгө багыт берүү менен анын келечегин керектүү деңгээлде түшүнүүгө мүмкүнчүлүк берет.

Математиканын тарыхы курсун өздөштүрүүдө математика илиминин өнүгүү жолу чыныгы дүйнөнүн диалектикалык закондору менен жүргүзүлө тургандыгы көрүнөт. Математиканын өнүгүү жолу акырындык менен токтолбостон удаалаштыкта жүргөн эмес, өнүгүүдө эски жана жаңынын ортосунда карама-каршылыктар болгон. Математика илими орто кылымда Рим империясынын каршылык жасагандыгына карабастан, илимди өнүктүрүүгө өз жанын аябагандарга милдеттүү.

XVIII кылымда Лейбництин, Ньютондун жана алардын жолун жолдоочулардын эмгектеринде берилген чексиз кичине чоңдуктардын анализи белгилүү епископ Беркли тарабынан катуу сынга алынган. Ошондой эле пределдер теориясы дагы көпкө чейин катуу сынга алынган. Математикалык анализдин негизин пределдер теориясынын базасында түзүү XIX кылымдын аягында гана кабыл алынды.

Евклиддик эмес геометриянын негизи Н. И. Лобачевскийдин эмгектери аркылуу 1826-жылы белгилүү болгон, бирок көпкө чейинки карама-каршылыктан кийин XIX кылымдын аягында гана андан ары өнүгүүгө мүмкүнчүлүк алган.

Азыркы учурда математиканын өнүгүүсү илимий ой-жүгүртүүлөр, илимий сындар аркылуу иш жүзүнө ашырылат. Илимий сындар математиканын чогултулган алдыңкы көз караштарынын негизинде анын удаалаш так системасын түзүү үчүн пайдаланылат. Математиканын жетишкендиктери коом үчүн кызмат кылат. Математиканын негизи деп, математиканын теориясынын тарыхый, логикалык жана философиялык проблемаларынын системасы эсептелинет.

1.2. МАТЕМАТИКАНЫН ӨНҮГҮҮСҮНДӨГҮ ПРАКТИКАНЫН РОЛУ

Математика илими эң байыркы илимдерден болуп саналат. Математикалык ой-жүгүртүү адам баласынын алгачкы жашоо мезгилинен баштап пайда боло баштаган.

Ф. Энгельс өзүнүн Анти-Дюринг деген эмгегинде: «Математика башка илимдер сыяктуу эле , адамдардын практикалык муктаждыктарынан: жер участокторунун аянттарын жана идиштердин сыйымдуулугун ченөөдөн, убакытты эсептөөдөн жана механикадан келип чыккан» деп айткан.

Математиканын алгачкы түшүнүктөрү гана эмес, математикалык илимдин эң жогорку жана абстрактуу идеялары да адамдардын практикасынан башталып, негизделген.

Эң байыркы убактарда эле адамдар өздөрүнүн практикалык иштеринде математикалык маалыматтарды колдонушкан. Алар сан жана саноонун жардамы менен чечилүүчү суроолорго дуушар болушкан. Акырындап бүтүн оң сандар пайда боло баштаган. Ченөөнүн, өлчөөнүн кандайдыр бир бөлүктөргө бөлүүнүн натыйжасында бөлчөк сандар пайда болгон.

Математиканын пайда болгондон баштап анын өнүгүүсүнө математикалык идеялардын, түшүнүктөрдүн жана методдордун пайда болушуна табыгыйматематикалык илим эң чоң таасир берген. Табыгыйматематикалык илим деп, жаратылыш жөнүндөгү илимдердин тобун айтабыз. Ошондой эле математиканын өнүгүүсүнө астрономия, механика жана физика илимдери дагы чоң таасир берген.

Орустун математиги — Пафнутий Львович Чебышевдин ошол убактагы математика үчүн идеялары, полиномдор теориялары жел тегирмендин, буу менен иштөөчү машиналардын түзүлүштөрүн изилдөөдөн, нагыз практикалык маселелерди чечүүдөн келип чыккан.

К. Ф. Гаусс тарабынан жүргүзүлгөн геодезиялык жумуштардын негизинде эң кичине квадраттар методу келип чыккан.

Симметрия жөнүндөгү окуу, чыныгы заттардын формаларын изилдөө процессинде жана процесстердин жүрүшүнүн мүнөзүн изилдөөдө келип чыккан жана өнүккөн. Бул жерде эң чоң ролду кристаллография ойногон. Алсак, Е. С. Федоров көп сандаган эмгектеринде кристаллдык заттардын касиеттери кристаллдарды түзгөн молекулалардын жайланышына байланыштуу, ошондуктан алар кыймылдардын тиешелүү группаларынын негизинде жаткан закондор менен аныкталат деп көрсөткөн. Кар, кайнатма туз, кумшекер ж. б. майда кристаллдардан турат. Кристаллдык заттардын касиеттерин жакшы билүү үчүн тиешелүү группанын геометриялык касиеттерин ажырата билүү керек. Мындан группалар теориясын өнүктүрүү зарылчылыгы келип чыккан.

Азыркы учурда ЭЭМ дин жана техниканын өнүгүү шартында математиканын тармактары кеңири өнүгө баштады: комбинатордук анализ, дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөр ж.б.

Практикадан математикалык идеялардын, түшүнүктөрдүн жана методдорун пайда болушун математиканын бардык бөлүктөрүнөн мисал келтирүүгө болот.

ЭЭМ дин өнүгүүсү практикалык маселелерди кеңейтүүгө мүмкүнчүлүк берди.

1.3. МАТЕМАТИКАНЫН БАШКА ИЛИМДЕР МЕНЕН БОЛГОН БАЙЛАНЫШЫ

Математиканы пайдалана турган тармактар көп кырдуу. Бул математиканын башка илимдер менен болгон бекем байланышын билгизет.

Математика башка илимдердин негизинде гана өнүкпөстөн, аларды изилдөөнүн математикалык методдорун иштеп чыгат.

Математикалык методдордун табыгый илимдерде колдонулушунун эки жагы бар:

1) кубулуштарга туура келүүчү математикалык маселени бөлүп алуу, б. а. моделин түзүү жана аны чыгаруунун методдорун табуу;

2) түзүлгөн математикалык моделдин кубулушка жакындыгын изилдөө, жаңы математикалык форманы иштеп чыгуу.

Азыркы мезгилде илимдерде математикалык моделдөө методу эң кеңири колдонулуучу методго айланууда. Математикалык моделдөө — бул, сырткы дүйнөнүн ар кандай кубулуштарын математикалык символдордун жардамы менен жазуу. Бул метод сырткы дүйнөнү таанып билүүнүн күчтүү методу болуу менен прогноздоонун жана башкаруунун негизи. Математикалык моделдөө методу менен изилдөө 4 этапка бөлүнөт:

1) Моделдин негизги объектилерин байланыштыруучу закондорду аныктоо. Бул этап изилденүүчү кубулуштун фактыларын жана өз ара байланыштарын терең билүүнү талап кылат. Мында объекттердин ортосундагы байланыш, математикалык тил менен жазылат.

2) Математикалык моделге келтирилүүчү математикалык маселелерди изилдөө. Мында негизги маселе математикалык моделдөөнү анализдөөнүн натыйжасында алуу.

3) Бул этапта кабыл алынган гипотезалык модель практиканын критерийин канааттандырары аныкталат.

4) Изилденүүчү кубулуштар жөнүндөгү белгилүү маалыматтардын топтолушуна карата математикалык моделди андан ары анализдөө жана модернизациялоо.

Ошондой эле логика-математикалык моделдөөгө зор маани берилет. Бул метод объектинин белгисиз жашырын сапаттарын изилдөөгө мүмкүнчүлүк түзөт.

Логика-математикалык моделдөө менен жүргүзүлүүчү операциялар формалдык өзгөртүп түзүүлөр аркылуу аткарылат да акырында мазмундуу тыянакка алып келет.

Математикалык моделдөө методунун мүмкүнчүлүгү канчалык кенен болгону менен ал изилдөөнүн анализ жана синтез, индукция жана дедукция, логикалык жана тарыхый тажрыйбалык жана башка методдору менен бирге иш жүргүзгөндө гана керектүү натыйжаны берет.

Изилденүүчү кубулуштар жөнүндөгү белгилүү маалыматтар илим менен техниканын, ЭЭМ дин өнүгүү процессинде улам тактала берет жана кабыл алынган математикалык модель кээде азыркы талаптарга жооп бербей калат. Ошондуктан кыйла өркүндөтүлгөн математикалык моделдерди түзүү зарылдыгы келип чыгат.

Математикалык методдор коомдук илимдерде дагы колдонулат, мында ыктымалдык-статистикалык методдору кеңири орун алат. Кибернетиканын жана ЭЭМ дин кеңири өнүгүүсүнө байланыштуу математиканын ролу экономикада, башкаруу системасында, психологияда ж.б. илимдин тармагында кеңири колдонула баштады.

1.4. МАТЕМАТИКАНЫН НЕГИЗГИ ӨНҮГҮҮ МЕЗГИЛДЕРИ

Математиканын өнүгүүсүн мезгилдерге бөлүүнүн максаты, анын өнүгүүсүндөгү фактылардын мүнөздүү өзгөчөлүктөрүн айырмалай билүү. Башкача айтканда, математиканын өнүгүүсүнүн объективдүү закондорун көрсөтүү.

Математиканын тарыхын советтик математиктер А. Н. Колмогоров менен А. Д. Александров төрт мезгилге бөлгөн. Информатика илиминин өнүгүшү менен математика илими дүркүрөп өсүшкө ээ болду. Математиканын жаңы тармактары пайда болду жана информатика билим берүү системаларына окуу предмети катары киришине байланыштуу XX кылымдын 70-жылдарынан кийинки убакытты математиканын өнгүүсүнүн өзгөчө мезгили катары карасак болот.

Ошентип математиканын өнүгүү тарыхын шарттуу түрдө 5 негизги мезгилге бөлүүгө болот.

1) Математиканын пайда болуу жана калыптануу мезгили.

Бул алгачкы математикалык фактылар пайда болгон байыркы мезгилден баштап, биздин доорго чейинки V—IV кылым. Мында математика башка илимдер менен бирге практиканын негизинде фактылардын чогулушу болуп саналат. Мында математика эмприкалык мүнөздө болгон.

Буюм саноо натуралдык сандар арифметикасынын жөнөкөй түшүнүктөрүн пайда кылган. Андан кийин бара-бара натуралдык сандар менен болгон амалдарды аткаруу ыктары өздөштүрүлгөн. Кандайдыр бир нерселерди бөлүктөргө бөлүү, бөлчөктөр түшүнүгүнө алып келди жана алар менен болгон арифметикалык амалдарды аткаруу эрежелерин түзүүгө түрткү берди. Акырындык менен арифметиканын түзүлүшүнө керектүү материалдар топтоло баштады.

Аянт жана көлөмдү ченөө, курулуш техникасын өздөштүрүү, астрономиянын талаптары геометриянын алгачкы түшүнүктөрүн өнүктүргөн. Илимдин андан ары өнүгүшү үчүн Египет жана Вавилондогу арифметикалык жана геометриялык билимдердин топтолушу зор мааниге ээ. Байыркы Вавилондо алгебра менен тригонометриянын башталыштары да пайда боло баштаган. Математиканын жаралуу мезгили жөнүндө бул китептин «Арифметиканын өнүгүү тарыхы» бөлүгүндө жана башка бөлүктөрдө берилген.

2) Элементардык математиканын мезгили. Биздин доорго чейинки V—IV кылымдан баштап биздин доордун XVI кылымынын аягына чейинки мезгил. Бул мезгилде математика туруктуу чоңдуктардын математикасы деп аталып, классикалык элементардык математика негизделген.

Математика бул мезгилде Байыркы Грецияда өзүнчө илим катары түзүлгөн. Грек геометриясынын башталышына Фалес Милетский жана Пифагор Самосскийдин салымдары зор. Элементардык математиканы негиздөөдө Евклид, Эратосфен, Герон, Диофант, Птоломей, Гиппарх ж.б. белгилүү математиктердин ысымдары көрүнүктүү орунда. Элементардык математика, ошондой эле Кытай, Индия, Борбордук Азия, Чыгышта, Батыш Европада жана Россияда өнүккөн.

Борбордук Азия жана Чыгышта илимдин өнүгүшү IX—XV кылымга туш келет. Мухаммед бен Муса аль-Хорезми алгебраны өз алдынча биринчи жолу илим катары негиздеген. Анын «Аль-джебр ва аль-мукабала» деген эмгегинин аталышындагы биринчи сөзүнөн «алгебра» термини келип чыккан. Ошондой эле Абу-Райхан Мухамед ибн Ахмед аль-Бируни (X—XI к.) Жердин айланасынын узундугунун 40180 км деп аныктаган. Бул санды азыркы талап боюнча дагы так деп эсептөөгө болот. Омар Хайям (X—XI к.) 3-даражадагы теңдемелерди изилдөө иштерин жүргүзгөн. Аль-Баттани, Абу-аль-Вефа ж. б. тригонометрия илиминин негиздерин түзүүгө чоң салым кошушкан.

Ал-Каши ондук бөлчөктөрдү изилдеген жана нин маанисин 17 ондук белгиге чейинки тактыкта аныктаган. Улугбек (XV к.) Самаркандда обсерватория курдуруп, анда жүздөн ашык окумуштуулар менен бирге астрономиялык байкоолорду жүргүзгөн жана, астрономиялык жана математикалык таблицаларды түзгөн.

XVI кылымда Италияда 3-даражадагы теңдемелердин алгебралык чыгарылыштары С. Ферро, Н. Тарталья, Кардано тарабынан берилет. 4-даражадагы теңдеменин чыгарылышы Л. Феррари тарабынан берилген.

Алгебранын андан аркы өнүгүшү И. Ньютон, Ф. Виет ж. б. окумуштууларга таандык. XVI кылымдын аягы XVII кылымдын башында Россияда математика боюнча биринчи окуу китеби «Арифметика» Л. Ф. Магницкий тарабынан чыгарылат.

3) Өзгөрмөлүү чоңдуктардын математикасынын өнүгүү мезгили. XVII кылымдан XIX кылымдын орто ченине чейинки мезгил. Чоңдуктар өз алдынча эмес, бири-бири менен байланышта изилденет. Функция жана функционалдык көз карандылыкты үйрөнүү негизги орунга коюлат. Предел, туунду, дифференциал жана интеграл түшүнүктөрү пайда болот. Механика менен физиканын негизги закондору дифференциалдык теңдемелер аркылуу жазыла баштады.

Өзгөрмө чоңдуктар математикасына негиз салгандардын эң көрүнүктүүлөрү болуп И. Ньютон жана Г. Лейбниц болду. Алардан тышкары XVII—XVIII кылымдарда Р. Декарт баштаган аналитикалык геометриядан баштап, Ж. Непер, М. Ролль, П. Ферма, Б. Кавальери, Я. Бернулли, И.Бернулли, Г. Лопиталь, Б. Паскаль, Ж. Лагранж, П. Лаплас, Г. Крамер, Ж. Даламбер, Л. Эйлер ж. б. окумуштуу математиктер өзгөрмө чоңдуктардын математикасынын өнүгүүсүнө чоң салым кошушту.

4) Азыркы математиканын мезгили. XIX кылымдын орто ченинен XX кылымдын 70-жылдарына чейинки мезгил. Бул мезгилде табият таануу жана техника койгон маселелеринин жана математиканын ички талаптарынын негизинде математиканын көп жаңы бөлүмдөрү түзүлгөн. Математика абстракциянын жаңы баскычына көтөрүлдү. Математикалык анализдин XVII—XVIII кылымдарда түзүлгөн бөлүмдөрү XIX—XX кылымдарда өтө тез өнүктү. XIX кылымда математикада өзүнүн ички керектөөлөрүнүн натыйжасында комплекстик сандар теориясы пайда болду. Математиканын ички теориясынын натыйжасында келип чыккан теориялардын бири Евклиддик эмес геометриянын түзүлүшү болду. Вектордук жана тензордук эсептөөлөр функционалдык анализдин ичинде азыркы физиканын керектөөлөрүнөн келип чыкты. Математикада изилденүүчү сандык катыштардын жана мейкиндиктик формалардын мазмуну улам кеңейди. Математиканын XIX кылымда аябай өнүгүшү математиканын алгачкы аксиомаларын карап чыгууга, аныктамаларынын жана далилдөөлөрүнүн так системасын түзүүгө, логикалык ар кандай ыкмаларды сын көз менен кароого туура келди. Мындан математикалык логика илими пайда болду. Дифференциалдык теңдемелердин теорияларынын өнүгүшү, механиканын жана математикалык физиканын өнүгүшүнө алып келди. Математикалык физика теориясы иштелип чыкты. Жаратылышты үйрөнүүдө жана техникалык маселелерди чечүүдө дифференциалдык теңдемелер методдоруна ыктымалдык теориясынын методдору олуттуу кошумча болуп саналат. XIX кылымдын аягы XX кылымдын башында кокустук процесстер теориясынын жаралышы жана математикалык статистика теориясынын өнүгүшү менен ыктымалдык теориясы көп жаңы колдонулуштарга ээ болду.

Көп түспөлдөр топологиясы боюнча изилдөөлөрдө дифференциалдык теңдемелер теориясы чоң роль ойноду. Ушулардын негизинде алгебралык топологиянын «комбинатордук», «гомотетиялык» методдору пайда болду. Булардын бардыгы жалпы топологиялык мейкиндиктер теориясын түзүүгө алып келди.

Айрым натыйжалар жана идеялардын жыйындысы катары каралган сандар теориясы XIX кылымдан баштап, түрдүү багытта жалпы теория катары өнүгө баштады.

Алгебралык изилдөөлөр алгебранын жаңы областтарына: группалар, талаалар, шакектер теориясына, жалпы алгебралык системаларга колдонула баштады. Алгебра менен геометриянын чегинде үзгүлтүксүз группа теориясы пайда болду.

Геометриянын жаңы бөлүмдөрү аналитикалык геометрия, дифференциалдык геометрия, риман геометриялары түзүлдү.

Мында К. Гаусс, Ж. Фурье, О. Коши, С. Пуассон, П. Дирихле, Ж. Грин, М. В. Остроградский, Н. И. Лобачевский, А. Пуанкаре, Ж. Адамар, К. Жордан, Д. Гильберт, П. Л. Чебышев, В. А. Стеклов ж. б. улуу математик окумуштуулардын ролу чоң.

Кыргыз Республикасында математика башка илимдер сыяктуу эле жаңы өнүгүү жолунда. Кыргызстандын математиктери дүйнө жүзүндөгү иштелип жаткан проблемалардын үстүндө иштеп жатышат. Алгачкы математикалык изилдөөлөр 1940-жылдан башталган. Кыргыз Республикасынын илимдер Академиясы 1960-жылы негизделген. Азыркы мезгилде математикалык изилдөөлөр ар тараптуу төмөндөгү багыттарда жүргүзүлүүдө: интегралдык теңдемелер жана функционалдык анализ; интегро-дифференциалдык теңдемелер жана алардын системалары; жогорку тартиптеги туундунун алдындагы кичине параметри бар интегро-дифференциалдык теңдемелер жана алардын колдонулушу, айырмалуу теңдемелер; автоматтык башкаруу; математикалык физика; эсептөө техникасы; эсептөө техникасын жана математикалык методдорду ар кандай изилдөөлөрдө колдонуу; сызыктуу алгебра; корректүү эмес жана тескери маселелер; сандар теориясы; математикалык моделдөө; мектептерде жана жогорку окуу жайларында математиканы окутуунун методикасы.

Мында Кыргызстандагы математика илимин негиздөөчү окумуштуулар М. Иманалиев жана анын окуучуларын ошондой эле улуу педагог математик И. Бекбоев жана анын окуучуларын айтып кетсек болот.

5) ЭЭМ дин өнүгүү мезгили. XX кылымдын 70-жылдарынан кийинки мезгил. Мында ЭЭМ дерди ар тараптуу пайдалануу, жеке компьютеринин кеңири колдонулушу менен негизделет. Бул мезгилде математикада оюндар, графтар, дискретүү, оптималдуу башкаруу ж. б. теориялары өнүгүү менен алардын ар кандай тармактары пайда болууда.

Компьютердик эксперименттерди жасоо үчүн азыркы учурда математикалык моделдөө эң кеңири колдонулууда.

Биринчи муундагы ЭЭМдер XX кылымдын 40-жылдарынын ортосунда пайда болгон. Анын негизги элементи электрондук лампа. Машинанын программалык жабдылышы негизинен стандарттык подпрограммалардан турат. Биринчи муундагы машиналар өтө чоң болуп, көп орунду ээлешкен жана көп энергияны сарпташкан. Мисалы «Стрела» машинасы 6400 электрондук лампадан жана 60 миң даана жарым өткөргүч диоддордон турган.

Экинчи муундагы ЭЭМ дер 1950—60-жылдары түзүлгөн. Мында электрондук лампанын ордуна жарым өткөргүчтүү диоддор жана транзисторлор колдонулган. Бул машиналардын экинчи өзгөчүлүгү программаларды алгоритм тилинде түзүүгө мүмкүн боло тургандыгы. Бул машиналарга, Раздан-2, БЭСМ-6, Минск-22, Минск-32 ж.б. кирет.

Үчүнчү муундагы ЭЭМдер 1960—70-жылдары түзүлгөн. Анын негизги элементтери интегралдык микросхемалар болгон. Бул ЭЭМдин өлчөмүн кичирейтүүгө жана алардын иштөө өндүрүмдүүлүгүн жогорулатууга мүмкүндүк түзгөн. Буга ЕС-1060, ИБМ-370]75 ж.б. ЭЭМ дер кирет.

Төртүнчү муундагы ЭЭмдер 70-жылдардын аягында пайда болгон. Алар чоң интегралдык схемалардан түзүлүп, микро ЭЭМ ди өнүктүрүү менен байланыштуу.

ЭЭМ азыр илим жана техниканын бардык тармактарында пайдаланылууда. Мында математикалык моделдөө кеңири пайдаланылат.

II Бөлүм

АРИФМЕТИКАНЫН ӨНҮГҮҮ ТАРЫХЫ

Бул бөлүмдө арифметиканын өнүгүү тарыхы берилген. Арифметика илими математика илиминде математиканын алгачкы түшүнүктөрүн берүүчү илим. Арифметиканы мектептен окуучулардын талапка ылайык үйрөнүп чыгышынын эң чоң мааниси бар. Адамдын математикага болгон кызыгуусу жөнөкөй арифметикалык эсептөөлөрдү өздөштүрүүсүнө карата болот.

Арифметика илими математика илиминин бир бөлүгү болуу менен адам баласынын практикалык иштериндеги керектөөлөрүнүн негизинде өнүккөн. Байыркы мезгилде адамдар жер-жемиштерди жыйнашкан, жапайы жаныбарларга аңчылык кылышкан, балык уулашып, таш бычактарды жасашкан. Бул учурда сан жана саноонун жардамы менен чечилүүчү суроолорго дуушар болушкан. Ошентип, эсептөөнүн жана номерлөөнүн өнүгүшү коомдун өнүгүшү жана адамдардын эмгектик чыгармачылыгынын өнүгүшү менен тыгыз байланышта болгон.

Арифметика сандардын жөнөкөй касиеттерин жана алардын үстүнөн болгон амалдарды үйрөтөт. Алгачкы мезгилдерде жалаң гана натуралдык сандар жана алардын үстүнөн болгон амалдар каралган.

Бул бөлүмдө эсептөөлөрдүн пайда болуу тарыхы, эсептөө системалары эсептөө каражаттарынын пайда болуусу, өркүндөтүлүшү жана манжалар менен эсептөөлөрдөн баштап, өркүндөтүлгөн эсептөө каражаттарынын тарыхы, алар менен эсептөө ыкмалары берилет.

Ошондой эле натуралдык сандар, терс сандардын пайда болушу бөлчөк сандардын пайда болуу тарыхы алардын түрлөрү каралат. Арифметикалык белгилердин жана арифметикалык амалдардын тарыхы берилет. Эсептөөнүн позициондук системасы жана натуралдык сандардын аксиоматикалык түзүлүшү каралды.

2.1. ЭСЕПТӨӨНҮН ПАЙДА БОЛУУ ТАРЫХЫ ЖАНА ЖАЗУУ ЖҮЗҮНДӨ НОМЕРЛӨӨ

2.1.1. ЭСЕПТӨӨНҮН ПАЙДА БОЛУУ ТАРЫХЫ

Адамзаттын миңдеген жылдар жана доорлор бою жүргүзгөн иштеринин натыйжасында маалыматтар топтолуп, бирок ал акылмандардын жана окумуштуулардын ысымдарын калтырбаган узак мезгилдерди кезиктиребиз. Ошондуктан ар кандай илимий жетишкендиктер элге таандык деп эсептелинет. Адамдын практикалык иштеринен жана жаратылыштагы кубулуштарды байкоосунан келип чыккан математикалык билимдер, бардык эле байыркы элдерде болгон. Алар сан жана саноонун жардамы менен чечилүүчү суроолорго дуушар болушкан. Кишинин колу канча болсо, бугунун ошончо мүйүзү, канаттунун ошончо канаты бар экендигин билишкен.

Ошолордун негизинде адамдар экиге чейин гана эсептешкен. Эки саны угуу, көрүү жана кандайдыр бир эки пар буюм аркылуу берилген. Индеецтер үчүн «көз» эки деген санды билдирсе, тибеттиктер үчүн «канат» эки деген санды билдирген. Эгерде буюмдардын саны 3 болсо аны «эки-бир», 4 санын «эки-эки», 5 санын «эки-эки-бир» деп аташкан. Алар алтыдан чоң санды колдонушкан эмес. Эгерде буюмдардын көптүгү 6 дан ашса аны «көп» деп түшүнүшкөн. Эсептөө системаларынын эң байыркысы болуп экилик эсептөө системасы эсептелинет. Бул эсептөө системасы байыркы Египеттиктерге таандык.

Акырындап үч, төрт ж. б. бүтүн оң сандар пайда боло баштаган.

Ошондой эле кээ бир уруулар, айрым учуру болуп Африкадагы уруулар бешке чейин гана эсептешкен. Алты болсо аны «беш-бир» деп эсептешкен. Бештик эсептөө системасынын издери скандинавиянын тилинде сакталып калган.

Этнографтардын айтуусу боюнча ушул убакка чейин үчкө чейин гана эсептеген Африка континентинде уруулар жашайт.

Кыргыз элинде жети санына чоң маани берилгендигинен, кыргыз эли бир убакта жетилик эсептөө системасын башынан өткөргөн деген кээ бир жыйынтыктарга келсек болот. Аларды кыргыз элинин макал-лакаптарынан, санжыралардан, мифтерден «жети» саны жөнүндө айтылгандардан мисал келтирсек болот. Мисалы, «Жети жолу өлчөп, бир жолу кес», «Жетинин бири кыдыр», «Бирөө соко менен, жетөө кашык менен», «Жети бакыр, бир тукур», «Жети жолоочу бир жолоочуну күтпөйт», илгери айыпка жыгылганда же кыздарга калың бергенде жети үйүр мал беришкен. Түшүнөн чоочуганда жети токоч жасап, таратышкан ж. б. у. с. Жетиден чоң санды көп деп эсептешкен.

Сандарды эсептөө бизде ондук системада жүргүзүлөт. Бул ондук система колдун манжаларынын санына карата эсептелинип калган.

Сандарды ондон группалап эсептөө ондук эсептөө системасы, ал эми он саны ондук эсептөө системасынын негизи болот.

Манжалардын санына карата ондон саноону көп пайдаланышкан. Эки колдо он манжа , ошого карата эсептөөнү жүргүзүшкөн. Анлис тилинде ушул убакка чейин, 1 ден 9 га чейинки сандарды «digits» деп аташат, бул латын тилинен «digitus» — «манжа» деген сөзүнөн келип чыккан.

Манжалар менен эсептөө — көрсөтмөлүү болуу менен практикалык керектөөлөрдөн келип чыккан. Кээ бир элдерде «кол» 5 санын, 10 «эки кол», 20 «адамдын толук турпатын» башкача айтканда эки кол жана эки бутун түшүндүргөн. Ошондой эле манжалар менен эсептөөлөрдү жүргүзүү ар кандай улуттар чогулушкан соода орундарында кеңири пайдаланылган. Манжалар менен эсептөө көп мезгилдерге чейин пайдаланылган жана эсептөөнүн кээ бир теориялары иштелип чыккан. Мектептерде манжа менен эсептөөлөр окутулган. Рим жазуучусу Цицерон биздин эрага чейин 1-кылымда римдеги мектептердин билимдерди жакшы бербей жаткандыгын окуучулардын негизинен манжалар менен эсептей тургандыгын сындаган.

Манжалар менен эсептөө Дунайдын тегерегинде жашаган улуттарда молдован, валахтарда кеңири таралган. Бул Римдик легионерлердин Дакияга (Дунайдын тегереги) талоончулук жасап тургандыгы менен түшүндүрүлөт.

Саноонун кыргызча аталышы саноонун ондук системасы менен байланышкан. Мисалы, он беш деген «он жана беш», үч жүз деген «үч жүздүк» дегенди билдирет.

Азыр дүйнөнүн бардык элдери ондук эсептөө системасын пайдаланышат. Бирок мурда көп өлкөлөрдө башка эсептөө системаларын пайдалангандар болгон.

Он экилик эсептөө системасында эсептегендер болгон. Батышта он экилик эсептөө системасынын белгиси болуп, ушул убакытка чейин тарелка, кашыктарды, ич кийимдерди «дюжина» (он экиден эсептөө) менен эсептөө болуп саналат. Ошондой эле «гросс дюжина» деп, 144 санын айтышат (gross-чоң). Он эки саны 2; 3; 4; 6 сандарына бөлүнгөндүктөн эсептөөдө он экилик системасын пайдалануу оңой болгон. Ошондуктан биздин эранын XVIII кылымда француз окумуштуусу Бюффон жана IX кылымда философ Кант ж. б. 12 лик позициондук эсептөө системасын киргизүүнү бир нече жолу талап кылышкан.

Чыгышта анын ичинде кыргыз элинде он экилик эсептөө системасын дагы башынан өткөргөндүгү жаштын мүчө менен эсептелиниши мисал боло алат. Бир мүчөл 12 жыл болуп эсептелинет. Илгери кыргыздар канча жашка чыккандыгын сураса, 3 мүчөл болдум же 4 мүчөл болдум деп, ж. б. у. с. жооп беришкен. Адамдар жылаңайлак жүргөн ысык өлкөлөрдө саноо үчүн колдорунун манжаларын гана колдонбостон, буттарынын манжаларын дагы колдонушкан. Мындан жыйырмалык эсептөө системасы пайда болгон. Бул жыйырмалык эсептөө системасынын белгилери азыркы мезгилдеги грузин жана француз тилдеринде сакталып калган. Мисалы, 80 санын алар «төрт жолу жыйырма» деген сөз менен аташат.

Байыркы Вавилондо 60 нерседен турган топ боюнча санашкан, б. а. алтымыштык эсептөө системасын пайдаланышкан. Саноонун мындай системалары азыркыга чейин сааттарды минутага, минутаны секундага бөлүүдө сакталып калган.

2.1.2. НОМЕРЛӨӨНҮН ПАЙДА БОЛУШУ ЖАНА ӨНҮГҮШҮ. ЭСЕПТӨӨ СИСТЕМАЛАРЫ

Жазуу жүзүндөгү номерлөөнүн милдети бардык сандарды мүмкүн болушунча аз сандагы белгилердин жардамы менен кагазга түшүрүү болуп саналат. Бул маселени ар кандай элдер ар түрдүүчө чечишкен.

Сандарды саноодо гана атаганды билбестен, аларды жаза билүүнү да үйрөнүү керек болгон. Сандарды жазуу пайда болгонго чейин, аларды эске тутуу үчүн жыгачтарга белгилерди коюуну пайдаланышкан, аларга санда канча бирдик болсо ошончо кесик жасашкан. А эми америкалык индеецтер жиптеги түйүндөрдүн жардамы менен белгилешкен. Акырындап бир санын бир сызык, эки санын эки сызык ж. б. у. с. белгилей баштады. Бирок өндүрүштөрдүн жана маданияттын өнүгүшү менен чоң сандарды сызыктар менен жазуу кыйын боло баштады. Сандарды жазуу үчүн сүрөттөрдү, атайын белгилерди, иероглифтерди, тамгаларды пайдалана башташты. Сандарды жазуунун өнүгүшү ар кайсы мамлекеттердин илиминин, маданиятынын, өндүрүшүнүн өнүгүшүнө карата ар кандай болгон.

«Цифра» деген сөз арабдардын «цифр» деген сөзүнөн келип чыккан, ал «бош» деген мааниде. Арабдар бул сөз менен индустун «сунья» — «бош орун» деген сөзүндө которушкан, индустар бул сөз менен, санда разряддын ордунда эч нерсе жок экендигин билгизишкен. XVIII кылымдын башына чейин, азыркы нөл «цифра» деп аталган. Магницкий өзүнүн «Арифметикасында» 0 белгисин «цифра» деп атаган. Англис тилинде азыркы мезгилге чейин нөл саны «цифра» (cipher) деп аталат.

Биздин эранын XIII кылымында индустук цифралар Европада пайда болгон жана көп адамдар үчүн түшүнүксүз болгон кезде, аларды кандайдыр бир жашыруун белгилер, жашыруун жазуу деп эсептешкен. «Шифр» деген жазуу «цифр» деген жазуудан келип чыккан. Азыркы кездеги «нөл» деп атоо латынча «nulla» «эч нерсе жок» деген сөзүнөн келип чыккан. Эң мурда нөлдүн белгиси ▭ белгиден келип чыгып, кийинчирээк тегерек менен жазуу менен алмаштырылган. Айрым элдерде нөлдү көпкө чейин тегерек деп атап жүрүшкөн.

Цифралардын азыркы кездеги формасы XV кылымдын ортосунда, китеп басып чыгаруунун ойлоп тапкандан кийин колдонула баштады.

Эсептөө системасы (номерлөө) сандарды атоо жана белгилөө ыкмаларынын жыйындысы. Сандарды белгилеп көрсөтүүнүн эң өркүндөтүлгөн принциби — позициялык принцип. Эсептөө системасынын негизи катары бирден чоң ар кандай сан алынышы мүмкүн.

Эсептөөнүн позициялык системасы, цифралардын позициясынын (ээлеген орундарынын) маанилерине негизделген.

Биздин доорго чейин XX кылымда Байыркы Вавилондо алтымыштык эсептөө системасы болгон.

Биздин доордун VI кылымында сандарды жазуунун жаңы системасын киргизишти. Бул системада бардык сандар 10 цифранын: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 жардамы менен белгиленген.

Мындагы цифралардын мааниси ал ээлеген орундан көз каранды болгон. Ошондуктан сандарды мындай жазууну позициондук эсептөө системасы деп аташат. Бул системада бир эле белги, ордуна карата ар түрдүү санды түшүндүрөт. Ошондой эле индиялыктардын жок разряддар үчүн өзгөчө белгини 0 цифрасын киргизиши эң сонун ойлоп табуу болгон. Акырындык менен сандарды жазуунун мындай жолу бардык жакка тарай баштаган.

Мисалы: 3333 санында, бир эле 3 цифрасы, турган ордуна карата ар түрдүү сандарды түшүндүрүп жатат.

$$3333 = 3\cdot10^3 + 3\cdot10^2 + 3\cdot10 + 3$$

Ондук эсептөө системасында N натуралдык саны төмөндөгү түрдө жазылат:

$$N = a_k\cdot10^k + a_{k-1}\cdot10^{k-1} + ... + a_0$$

Мында $a_k a_{k-1}...a_0$ терс эмес бүтүн сандар.

Сандарды кандайдыр бир башка r негизи менен төмөнкүдөй жазууга болот,

$$a_k r^{k-1} + a_{k-1} r^{k-2} + ... + a_1$$

Мында a_1 бирдиктердин цифрасы, a_2 экинчи разрядда турган цифра ж. б. у. с.

Эсептөөнүн экилик системасында 0 жана 1 цифралары колдонулат. Каалагандай санды эсептөөнүн экилик системасында жазуу үчүн, ал санды удаалаш экиге бөлүп, алынган 0 же 1 калдыктары акыркы сандан биринчиге карата удаалаш жазылат. ЭЭМ дердин иштөө принциби экилик эсептөө системасына негизделген.

2.1.3. ЕГИПЕТТИК НОМЕРЛӨӨ

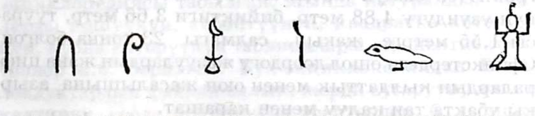
Байыркы папирустардан (папирус — кагаз сыяктуу бышык материал) бизге жеткен Египеттиктердин байыркы сандык жазылыштары биздин эрага чейинки 3300 жылдарга таандык. Анда Египеттин падышасынын 400 000 ар кандай малдарды, 1 422 000 эчкилерди жана 120 000 туткундарды алганы айтылат.

Египеттиктер ондук эсептөө системасы менен эсептешкен. Алардын жазган жазуулары жана цифраларынын жазуусу байыркы мезгилде үч учурдан өткөн. Эң алгачкы сандарды жазуусу башка элдер сыяктуу эле сандарды пиктографтер менен жазуу (сүрөт тартуу менен жазуу), мисалы 4 эчкинин санын айтыш үчүн, 4 эчкинин сүрөтүн тартышкан. Андан кийин сандарды иероглифтер менен (жөнөкөйлөнгөн сүрөт) жазышкан. Мында мисалы эки арстандын санын жазыш үчүн, бир арстандын сүрөтүн тартып астына 2 сызыкты сызышкан. Бирдиктер жана ондуктар үчүн өзгөчө белгилерди пайдаланышкан.

Жашоонун өнүгүүсү менен тез жазуунун ыкмалары ачыла баштаган. Сандарды иератикалык түрдө жазып башташат, мында иероглифтер шарттуу белгилер менен алмашылат. 1 ден 9 га чейинки цифралар жекече белгилерди ала баштайт. Кийинчирээк сандарды жөнөкөйлөтүлгөн жазуу, демотикалык номерлөө (грек тилинен которгондо «демос» — «эл») пайда болот. Бизге жеткен Египеттик папирустардын көпчүлүгү иератикалык, жазма менен жазылган. Бул иероглифтик жазууларды окуганга караганда көбүрөөк кыйынчылыкты туудурган.

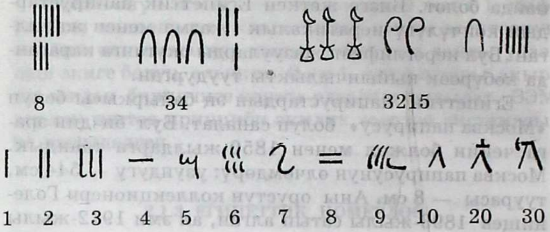
Египеттик папирустардын эң байыркысы болуп «Москва папирусу» болуп саналат. Бул биздин эрага чейин болжол менен 1850-жылдарга таандык. Москва папирусунун өлчөмдөрү: узундугу — 544 см, туурасы — 8 см. Аны орустун коллекционери Голеницев 1893-жылы сатып алган, ал эми 1912-жылы Москванын искусство музейинин менчигине өткөн.

Көлөмү жагынан андан да чоң «Ахместин папирусун» 1858-жылы Англиянын коллекционери Райнд сатып алган, аны көпкө чейин Райнд папирусу деп атаган. Ал биздин эрага чейинки 1700-жылдарга тиешелүү. Ахместин папирусу узундугу 544 см жана туурасы 33 см болгон тилкеден турат. Бул папируста 33-жылы суулар убактысынын 4 айында Ра-А-Ус падышасынын убагында жазылган деп айтылган. Ахмес (биздин эрага чейин XVIII—XVII кылым) Египеттик катчы болгон деп берилет. Байыркы Египеттин калган математикалык эсептөөлөр жазылган папирустарында ошондой эле сандарды жазуунун эрежелерин кайталайт.



1-сүрөт. Иероглифтик цифралардын жазылышы.

Мисалы: 8, 34, 3215 сандарынын иероглифтер менен жазылышы.



2-сүрөт. Иератикалык цифралар.

Египеттик жазуулар жогору жакта айтылгандай Москванын искусство музейинде, Петербург Эрмитажында, Петербург сүрөт Академиясында, Неванын боюнда турган сфинкстерде сакталып калган.

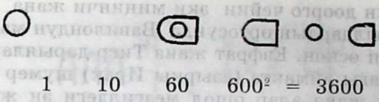
Бул сфинкстер (башы адамдыкындай жасалган арстан түрүндө падышаларды сүрөттөп көрсөтүү) 1819-жылы Египетте жүргүзүлгөн казууларда табылып, 1832-жылы Петербургга алынып келинген. Алар, биздин жыл эсебибизге чейинки 1419—1383-жылдарда башкарып жүргөн Египет падышасын сүрөттөп көрсөтөт, демек, алар мындан биздин эрага чейин XV кылымдарда жасалгандыгын далилдейт. Алар эң бекем граниттен оюлуп жасалган. Сфинкстин тулку боюнун узундугу 4,88 метр, бийиктиги 3,66 метр, туурасы 1,55 метрге жакын, салмагы 23 тонна болгон. Сфинкстердеги ошол доордогу жазуулардын жана цифралардын кылдаттык менен оюп жасалышына азыркы убакта таң калуу менен карашат.

2.1.4. ВАВИЛОНДУК НОМЕРЛӨӨ

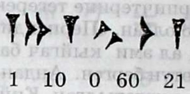
Вавилондун маданияты бир нече миңдеген жылдар бою өсүп өнүккөн. Алардын маданиятынын эстеликтери биздин доорго чейинки төрт миңинчи жылдарга таандык.

Биздин доорго чейин эки миңинчи жана үч миңинчи жылдардын ортосунда Вавилондун маданияты гүлдөп өскөн. Евфрат жана Тигр дарыяларынын ортосундагы аймакта (азыркы Ирак) шумер калкы жашаган жана алар ошол мезгилдеги эң жогорку маданиятка жетишкен. Вавилондуктар ошол убакта ондук эсептөө системасын пайдаланган. Сандык белгилер чопо кирпичтерине тегерек штифтер менен катуу басылып коюлган. Перпендикуляр коюлганда тегеректи берген, ал эми кыйгач багыт жарым тегерек же айдын сүрөтүн берген. Андан кийин алар ысык күндүн аптабына кургатылган. Кийинчирээк шынаа түрүндөгү цифраларды жаза башташкан. Бир шынаа 1 ди берген ал эми, бурч менен бириктирилген эки шынаа 10 санын түшүндүргөн. Ал эми калгандары кандайдыр бир өзгөчө белгилери менен ушуларды кайталоо менен берилген. Мында жарым ай бир цифрасын, ал эми тегерек он цифрасынын жазылышын берген. Ал белгилер 5000 жылдардын ичинде жакшы сакталып азыркы Сенкере шаарынын археологиялык казууларынан табылган. Бул казып алынуулар 1854-жылы англичанин Лофтус тарабынан жүргүзүлгөн. Шынаа түрүндөгү сандардын үстүнөн болгон амалдар алтымыштык эсептөө системасында жүргүзүлгөндүгүнүн, алгачкы белгилердин кээде гана пайдалангандыгын казуулардан көрүүгө болот. Вавилондуктардын 44 таблицалардагы математикалык энциклопедиясы табылган. Мында натуралдык сандарды кошуунун, көбөйтүүнүн, квадратка көтөрүүнүн, кубка көтөрүүнүн таблицалары, процентке эсептөөлөр ж.б. берилген. Бул энциклопедиядан Вавилондуктардын дыйканчылык, жерди сугарууну жөнгө келтирүү, соода жүргүзүүчү эсептөөлөр, б. а. ошол убактагы талап кылган практикалык маселелерди чечүүгө мүмкүн болгон эсептөөлөрдүн ыңгайлуу жолдору белгилүү болгондугу көрүнүп турат.

Вавилондук жазуу жүзүндөгү номерлөө төмөндөгүдөй жүргүзүлгөн.



3-сүрөт. Шумердик номерлөө.



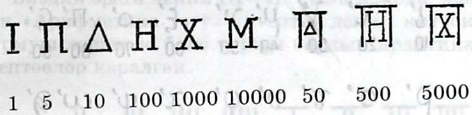
4-сүрөт. Шынаа түрүндөгү номерлөө

Вавилондуктар, өз убактысында эсептөөнүн өркүндөтүлгөн жолун түзүшкөн, алар алтымыштык эсептөө системасын пайдалануу менен бөлүү амалын аткарууну жеңилдетишкен. Алар тегеректин 360 ка бөлүнүүсүн, саатты 60 минутага, минутаны 60 секундага, секунданы 60 терцияга бөлүнө тургандыгын биринчи жолу айткан.

Урарту элдери Вавилон менен чектеш болуп, Вавилондук математиканы өздөштүрүп, аны кайра иштеп чыгышкан. Мына ошентип байыркы Вавилондуктардын эсептөө системалары, эсептөө ыкмалары Урарту элдери аркылуу Закавказье элдерине, өзгөчө армян элинин эң байыркы математикалык маданиятынын өсүшүнө чоң таасир берген.

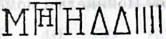
2.1.5. ГРЕКТИК НОМЕРЛӨӨ

Байыркы гректердин сандык белгилери Крит аралында табылган. Алар биздин эрага чейинки XVII—XVI кылымдарга тиешелүү болгон. Андан кийин биздин эрага чейин VII—VI кылымдарда сандарды аттикалык (Аттика Грециянын борбор шаары) системада жазышкан. Бул сандык белгилер, иероглифтер менен атактуу грек математиги Фалес (биздин эрага чейин 624-547-жылдар) пайдаланган. Бул «аттикалык системалар» деп аталган номерлөөнү геродиандык белгилер деп да аташкан.



5-сүрөт. Геродиандык белгилер.

Мисалы: 10624 санынын геродиандык белгиде жазылышы.



Мында кээ бир сандардын жазылышы, сандардын атынын биринчи тамгасын берген. 5(пенте), 10 (дека), 100 (гекатон), 1000 (хилиой), 10 000 (мириой). Бул сандардын айтылышы азыркы терминдерде сакталып калган. Пентограмма, пентагон (беш бурчтук), километр ж. б. у. с. Геродиандык сандык белгилер биздин эрага чейинки V кылымда афиндик Периклдин кул элөөчүлүк демократия учурундагы табылгалардан кездешет.

Андан ары тамгалар пайда боло баштайт. Байыркы гректер, славяндар ж.б. элдер сандардын ордуна тамгаларды пайдалана баштаган. Сандарды тамгалардан айырмалоо үчүн үстүнө сызыкчаларды же кандайдыр бир өзгөчө белгилерди коё баштаган.

Сан атоочтордун биринчи тамгаларын пайдаланышкан. Бул ионикалык номерлөө деп аталган. Геродиандык белгилерден кийин ионикалык номерлөө пайдаланууга абдан ыңгайлуу болгон.

6-сүрөт. Ионикалык номерлөө.

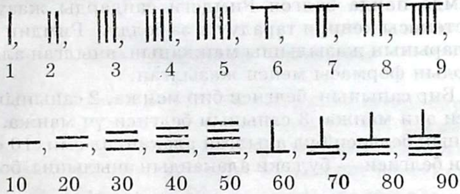
Ал эми миңдиктерди жазганда бирдиктердин астына үтүр коюлган Мисалы: ,α′ – 1000 ж. б. у. с. жазылган. Алфавитти гректер семит элдеринен (еврейлер, арабдар ж. б.) алган, ал эми сандарды тамгалар менен белгилөөнү гректер өздөрү ойлоп тапкан. Семиттер кайра ионикалык номерлөөнү кабыл алышкан.

2.1.6. КЫТАЙЛЫК НОМЕРЛӨӨ

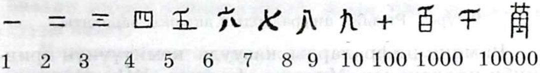
Кытай цифралары иероглифтер менен берилген. Алар бештик эсептөө системасы менен көпкө чейин пайдалангандыгы математикалык байыркы китептеринен көрүүгө болот. Бештик эсептөө системасы алардын эсептөөчү куралы суан-панда сакталганын көрүүгө болот. Тогуз белгилер бамбук таякчасы аркылуу көрсөтүлгөн, алардын жайланышына карата маанилери ар кандай болгон. Бара-бара иероглифтерге өтүшкөн.

Байыркы Кытай элинин математика боюнча эң байыркы биздин эрага чейинки 1000 жылдары жазылган «Чеу пей», эсептөөнүн ыйык китебинен, алардын сандардын касиеттери жана эсептөө эрежелерин абдан жакшы билгендиги көрүнөт.

Биздин эрага чейин III—II кылымдарда жазылган «Арифметика тогуз китепте» деген китебинде, турмуш-жашоодо боло турган бардык практикалык эсептөөлөр каралган.



7-сүрөт. Кытайлык сандык белгилер.



8-сүрөт. Кытайлык иероглифтер.

Кытайлар ондук эсептөө системасын эрте эле кабыл алган болуш керек. Себеби, биздин эрага чейин 3000 жылдар мурда эле, императору Хоанг Ти империяны 10 областка, ар бир областы 10 өрөөнгө, ар бир өрөөндү 10 райондорго, бөлгөн ар бир райондо 10 дон шаар болгон.

Бизге жеткен байыркы Кытайдын арифметикалык эсептөөлөрү боюнча караганда кытайлар сандардын касиеттерин абдан жакшы билгендиги көрүнүп турат. Байыркы китептерде сандарды кандайдыр бир ирээттүүлүктө жайгаштырууга кызыгышкан. Бул кызыгуулар, сандар жөнүндөгү илимдин өнүгүшүнө алып келген.

2.1.7. РИМДИК НОМЕРЛӨӨ

Байыркы Римде 1 ден 9 га чейинки сандар таякчалардан турган. 1 саны бир таякчадан, 2 саны эки таякчадан ж.б.у.с. 10 саны сызылган таякчадан, 20 саны кыйгач кесилген эки тик таякчадан турган ж.б.у.с.

Биздин эрага чейин бешинчи жана алтынчы кылымда пайда болгон Римдеги сандарды жазуунун системасы кеңири таралууга ээ болду. Римдин цифраларынын жазылышы манжанын, ачылган алакандардын формасы менен жазылган.

Бир санынын белгиси бир манжа, 2 санынын белгиси эки манжа, 3 санынын белгиси үч манжа, 5 санынын белгиси бул ачылган алакан, ал эми 10 санынын белгиси — бул эки алакандын ачылышы болгон.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

9-сүрөт. Римдик цифралардын акыркы варианты.

Римдик цифраларды жазууда кемитүүнүн принциби колдонулат. Мисалы, 4 санын IIII деп жазуунун ордуна IV, 9 санын VIIII деп жазуунун ордуна IX , 40ты XXXX деп жазуунун ордуна XL деп жазылат ж.б.у.с. MDCXXIX — 1629 .

Рим цифралары пайда болгондо тамгалар менен байланышы болгон эмес, бара-бара 100 санын (centum) — C деп, ал эми 1000 санын (mille) — M деп сан атоочтордун аталышынын баш тамгаларын жаза башташкан.

Рим цифралары көпкө чейин колдонулган. Мектептерде азыркы цифралар келгенче мектептик цифралар деп аталган. Ал тургай XVIII кылымда иш кагаздарына рим цифралары менен жазууга уруксат берилген. Биз ушул убакытка чейин рим цифраларын номерлөөдө колдонобуз.

Сандарды рим системасында жазуу ыңгайсыз болгон, б.а. сандар менен арифметикалык амалдарды аткаруу кыйын болгон.

38 санын жазыш үчүн XXXVIII, 2737 санын жазыш үчүн MMDCCXXXVII жазууга туура келген.

Аны, болжол менен мындан 1400 жыл мурда, Индияда пайда болгон сандарды жазуунун белгилүү системасы сүрүп чыкты.

2.1.8. ИНДИЯЛЫК НОМЕРЛӨӨ

Индия эли Вавилон жана Египет менен бирдей эле байыркы маданиятка ээ болгон. XX кылымда Пакистандагы Мохенджо-Даро байыркы шаарынан көп сандаган архитектура, ар кандай эстеликтер, иероглифтик жазмалар ж.б. лар археологиялык казууларда табылган. Булар байыркы Индиянын өндүрүшүнүн өнүккөндүгүн көрсөтөт. Бул табылгалар биздин доорго чейинки 3000 жана 2000 жылдарга туура келет.

Индиялык математика боюнча байыркы табылгалардан болуп 1881-жылы табылган Бакхшалинин «Арифметикасы» саналат. Бул биздин доорго чейинки 2000 жана 1000-жылдарга таандык. Бакхшалинин китебинде цифраларды жазуунун формасы азыркы санкриттик цифраларды жазууну эске салат. Санкрит тили биздин доорго чейин III кылымда колдонулбай, жок болгон тилге кирет, бирок Индиянын окумуштуулары ушул убакытка чейин изилдөө иштеринде колдонушат. Мында санкрит алфавитинин үнсүздөрүн жазган жана анын астына ирети менен 1 ден 9 га чейинки сандар жана 0 саны жазылган, 0 санын чекит түрүндө жазышкан. Индиялыктар сандарды аталышын, амалдардын аткарылышын ыр түрүндө айтышкан. Ошол убакта алар ондук эсептөө системасын пайдаланышкан.

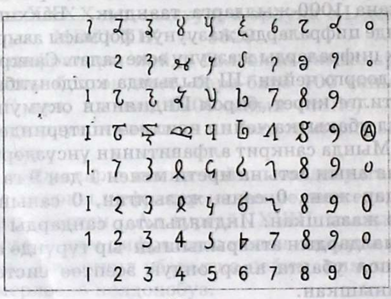
Биздин доорго чейин V кылымда перстер Индияны басып алган жана арамей (сирия) тилин жана арамей жазмасын киргизген. Индиялыктар биздин доордун VI—VII кылымына чейин арамей жазмасын жана сандарды номерлөөсүн пайдаланышкан. Арамейлерде 20 лык эсептөө системасы болгон. Сандар Сириялык номерлөөнүн өзгөчөлүктөрү менен жазылган. Мисалы 70ти жазыш үчүн 20 нын белгиси үч жолу, 10 белгиси бир жолу жазылат.

Биздин доордун VI кылымында сандарды жазуунун жаңы системасын киргизишти. Бул системада бардык сандар 10 цифранын: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 жардамы менен белгиленген.

Мындагы цифралардын мааниси ал ээлеген орундан көз каранды болгон. Ошондой эле индиялыктардын жок разряддар үчүн өзгөчө белгини 0 цифрасын киргизишкен.

Мисалы: 3333 санында, бир эле 3 цифрасы, турган ордуна карата ар түрдүү сандарды түшүндүрүп жатат.

ИНДИЯЛЫК ЦИФРАЛАРДЫН ӨРКҮНДӨТҮЛҮП АЗЫРКЫ ЦИФРАЛАРГА ӨТҮҮСҮНҮН КЫСКАЧА ТАБЛИЦАСЫ



10-сүрөт.

1-катарда Индиянын цифралары, IX кылым.

2-катарда арбдардын цифралары, X кылым.

3-катарда испандыктардын цифралары, 976-жыл.

4-катарда французлардын цифралары, XII кылым.

5-катарда французлардын цифралары, XIII кылым.

6-катарда готикалык цифралар 1400-жыл.

7-катарда кайра жаралуу учурундагы цифралар, 1500-ж.

8-катарда азыркы цифралар.

Адамзаттын математикалык билимдеринин казнасына индустардын кийирген эң баалуу салымы он белгинин: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 жардамы менен сандарды жазуунун биз колдонуп жүргөн жолу болуп саналат. Бул жолдун негизи бир эле цифра, ал кайсы орунду ээлегенине жараша бирдиктин санын, ондуктун санын, жүздүктүн санын же миңдиктин санын ж.б.у.с. берет деген идеяда турат. Кандайдыр бир разряд жок болгон учурда анын ээлеген орду цифраларга кошулуп жазылган нөлдөр менен белгиленет.

Улуу француз математиги Лаплас (1749—1827) бул жөнүндө мындай деп жазат: «Сандарга формасы боюнча маани берүүдөн тышкары дагы ээлеген орду боюнча маани берип, бардык сандарды бир аз гана белгилер менен жазуу жөнүндөгү ой ушунчалык жөнөкөй, анын ушул жөнөкөйлүгү аркасында анын канчалык таң калаарлык экендигин баалоо кыйын. Грек илиминин эң улуу генийлери — Архимед жана Аполлонийдин бул ойду ачууга жетпегендигинин мисалынан, мындай жетишкендикке келүүгө канчалык кыйын болгондугун биз ачык көрүп олтурабыз».

Индустардын бул ойлоп-табуусу, элдердин тажрыйбасынан жана байкоолорунан келип чыккан натыйжа болуп саналат.

2.1.9. КЭЭ БИР САНДАРДЫН АТАЛЫШЫНЫН ТАРЫХЫ

Эсептөө үчүн алгачкы учурларда анчалык чоң эмес сандар керек болгон, ошондуктан разряддар үчүн аз аталыштар болгон. Байыркы дүйнөнүн окумуштуулары төмөнкүдөй суроолордун үстүндө иштешкен: «Дарыядагы суунун тамчысын, топтогу чегирткени, деңиздин жээгиндеги кумдун бүртүгүн сан менен туюнтууга болобу?» Ошол кездеги алар билген сандар бул үчүн жетишсиз болгон. Бирок мындан эки миң жыл мурда грек математиги Архимед номерлөө системасын түзгөн жана анда эң чоң сандар болгон, ал сандардын жардамы менен деңиздин жээгиндеги кумдун бүртүктөрүн гана эмес, Жер шаарындагы кумдун бүртүктөрүн саноого мүмкүн болгон.

Орустар 10 000 ден ашканда «тьма» (караңгы), ачык элестетүүгө мүмкүн болбогон караңгы сан деп аталган. Андан кийинчирээк эсептөөнүн чеги 10^8 га «тьма тём» (караңгынын караңгысы) чейин деп жылдырылды. Орустар андан «славяндык улуу сан» деп аталган экинчи системаны колдоно баштаган. Тьма — 10^6, легеон — 10^{12}, леодр — 10^{24}, ворон — 10^{48}, колода — 10^{49} деген маанилерди берген. Жогорудагы сандарды жазууда бирдикти белгилеген тамга менен жазып ар бирин өзүнчө белгилер менен белгилеген.

Орустарда ошол убакта номерлөө алфавиттеги тамгалардын үстүнө өзгөчө белги (титло) коюп жүргүзүлгөн. Индустук номерлөө кабыл алуу менен славяндык номерлөө практикалык маанисин таптакыр жоготту. «Миллион» деп атоо XIV кылымдан баштап, миллиард XVI кылымдан баштап колдонула баштады.

Л. Ф. Магницкийдин (1703) «Арифметикасында» миллион, биллион, триллион, квадриллион берилген.

Сандардын кыргызча аталышы саноонун ондук системасы менен байланышкан. Кыргыз тилинде натуралдык сандарды саноодо төмөндөгү сандар пайдаланылат: бир, эки, үч, төрт, беш, алты, жети, сегиз, тогуз, он, жыйырма, отуз, кырк, элүү, сексен,- токсон, жүз, миң, Ал эми 60 жана 70 сандары «алты» жана «жети» сандарына «мыш» жана «миш» уландылары кошулуу менен айтылат. Миңден чоң разряддагы сандар дүйнөлүк терминдер миллион, миллиард, ж. б. у. с. айтылат.

2.2. БАЙЫРКЫ ЭСЕПТӨӨ КАРАЖАТТАРЫ ЖАНА АЛАРДЫН ӨРКҮНДӨТҮЛҮШҮ

2.2.1. МАНЖАЛАР МЕНЕН ЭСЕПТӨӨ

Адамдар байыркы мезгилден баштап эле эсептөөнү кандайдыр бир каражаттардын жардамы менен жеңилдетүүгө аракеттенишкен. Жогоруда айтылгандай эсептөө каражаты болуп адамдардын колдорунун жана буттарынын **манжалары** болгон. Манжалардын ар кандай бүгүлүштөрү менен бирдиктер жана ондуктар эмес жүздүктөрдү, миңдиктерди көрсөтө алышкан. Сандарды колдорунун кыймылдары менен бирдикте миллионго чейин көрсөткөнгө болгон. Миллионго чейинки сандарды манжалар менен көрсөтүүнүн методун Ирландиялык монах Беда (VII—VIII) кылымда «Убакытты эсептөө жөнүндө» деген китебинде жазган.

11-сүрөт. Манжалар менен эсептөө.

100гө чейинки сандар сол колдун манжалары менен көрсөтүлгөн, андан калган сандар оң колдун манжалары менен көрсөтүлгөн.

Эсептөөнүн тарыхында айтылып кеткендей манжалар менен эсептөө байыркы мезгилде жана орто кылымда кеңири таралган. Онго чейинки сандарды көбөйтүүдө эсептөөлөр манжалар менен төмөндөгүдөй жүргүзүлгөн.

Мисалы: 7x7:

1) 10—7=3, бир колдон 3 манжаны көтөрөбүз, 2 манжа жумулган боюнча калат;

2) 10—7=3, экинчи колдон 3 манжаны көтөрөбүз, 2 манжа жумулган бонча калат;

3) жумулган манжалардын суммасы 2+2=4 көбөйтүндүнүн ондугун, ал эми көтөрүлгөн манжалардын көбөйтүндүсү 3x3=9 көбөйтүндүнүн бирдигин көрсөтөт.

Демек, 7x7 =40+9=49.

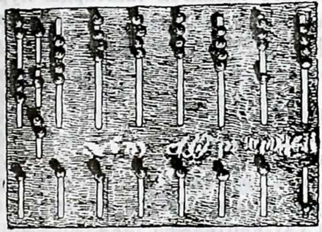
Ушул сыяктуу: 7x8=(2+3)x10+3x2=56
7x9=(2+4)x10+3x1=63.

Манжалар менен эсептөөгө байланыштуу, орто кылымдагы Римдик автор Бояция (480—524) сандарды бирдиктер (манжалар), ондуктар (муун — «сустав») деп бөлгөн.

Манжалар менен эсептөө ондук системада толук негизделгенден кийин акырындап жоюлуп кеткен. Ал эми Европада XVIII кылымга чейин сакталган.

2.2.2. АБАК

Байыркы Вавилондук, Египеттик ж. б. мамлекеттеги соодагерлер эсеп-кысаптарды таштардын, дандардын, ракушкалардын жардамы менен эсептешкен. Бара-бара аларды доскаларга ыңгайлап салышып, абак деп аталуучу эсептөөчү куралга айландырышкан. Сөзмө сөз которгондо «абак» байыркы еврей тилинен алынган «чаң», «кум» деген маанини түшүндүрөт. Себеби бир убакыттарда абактын ичине кум салышкан жана аны сандарды жазыш үчүн, фигураларды чийиш үчүн пайдаланышкан. Абактагы бирдиктер - I, ондуктар — X, жүздүктөр — C ж.б. рим тамгалары менен белгиленген. Ар бир разряддын саны таштардын саны менен көрсөтүлгөн. Латынча кичинекей таштар (calculi) деген сөздөн «калькуляция» деген сөз келип чыккан.



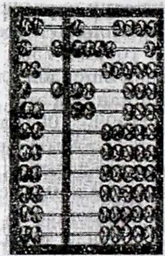
12-сүрөт. Абак.

Абактар менен гректер дагы пайдаланышкан. Историк Геродот (биздин эрага чейин V кылым) абактарына таштарды салган гректер жөнүндө жазат. Пифагор арифметиканы жана геометрияны үйрөнүүдө абактар менен иштөөнү көрсөткөн. 1846 ж. грек аралы Саламинде мрамордон жасалган, чоң өлчөмдөгү бетинин аянты 105см х 75см болгон абак табылган. Абактар менен ошондой эле индустар, арабдар дагы пайдаланышкан. Ал эми Европада Рим папасынын күчү менен (999—1003) жана Герберт жана анын окуучуларынын жардамы менен абактар пайдаланыла баштаган. Алар доскалардын ордуна клетка болуп тартылган столдордо эсептөөлөрдү жүргүзүшкөн. Мындай столдор азыр дагы эле Европанын кээ бир кыштактарында табылат. Ошондой эле абак орто кылымда Батыш Европада соода жасоодо кеңири пайдаланылган. Эсептөөлөрдө ыңгайлуу болсун үчүн, отургучтарга коюшкан. «Отургуч» италия тилинде «banca». Ушул сөздөн азыркы «банк» деген финансо-кредиттик төлөө мекемесинин аты аталып калган.

Абактардын түрлөрү болуп жиптерге тизилген таштар эсептелинген. Мусулмандар ушул убакытка чейин жиптерге тизилген таштарды куран, келме, сүрөөлөрдү айтып, алардын кайталанышын эсептешет. Жиптерге тизилген таштар, **теспе** деп аталат.

2.2.3. СУАН-ПАН

Андан кийинки байыркы эсептөө куралдары болуп кытайдын **«суан-пан»** эсептөөчү куралы. Ал, узатасынан бирдей эмес бөлүктөргө бөлүнгөн терең эмес узунураак формадагы ящиктен турат. Ящиктин туурасынан узунураак бир жагынан анын экинчи жагына учу капталына такалып бекитилген чыбыктар орнотулган. Бардык чыбыктарга, эсеп жүргүзүлө турган жагына бештен шарик, куушураак жагына экиден шарик өткөрүлгөн. Суан-пандын төмөнкү бөлүгү бешке чейинки эсеп жүргүзүүдө колдонулат, ал эми жогору бөлүгүндөгү эки шариктин ар бири бешке жүргөн.



13-сүрөт. Суан-пан.

Суан-панда эсептөө бештик эсептөө системасында жүргүзүлгөн. Бул эсептөөнүн белгилери Римдик номерлөөдө калган:

алты — VI — беш жана бир;
жети — VII — беш жана эки;
сегиз — VIII — беш жана үч;
төрт — IV — бирөө кем беш.

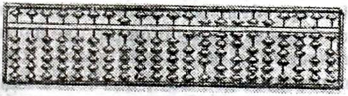
Эгерде андан 1, 2, 3, 4 бирдикти салуу керек болсо, анда бирдиктер көрсөтүлгөн чыбыкта (биздин сүрөттө оң жактан бешинчи чыбык) ошончо шарик эң чекесине ылдый көздөй жылдырылат.

Беш шарикти жылдыруунун ордуна суан-пандын жогорку бөлүгүнөн ылдый чекесин көздөй бир шарик жылдырылат. Эгерде ушул эле жол менен дагы беш бирдик кошулса, анда алардын ордуна куралдын жогорку бөлүгүнө экинчи шарик жылдырылат.

Анда он деген сан суан-пандын төмөнкү бөлүгүндөгү келерки чыбыктын бир шариги менен белгиленет ж.б.у.с. эсептелинет.

2.2.4. СОРУБАН

XVI кылымда кытайлардын суан-панын япондуктар үйрөнүп колдоно баштаган жана ага караганда пайдаланганга ыңгайлуураак **«сорубан»** деген эсептөө куралын ойлоп табышкан. Алар жогорку бөлүккө эки шарик эмес, бир шарик калтырышкан.



14-сүрөт. Сорубан.

Куралдын түзүлүшүнө япондуктардын кийирген өзгөртүүсү колдонгонго ыңгайлуу болгон, себеби экинчи шарик артыкбаш коюлуп колдонуу кыйынчылыкка алып келген. Сорубанда дагы эсептөө суанпандай эле бештик эсептөө системасында жүргүзүлгөн.

XVI кылымга чейин жана ошол кылым ичинде Европада суан-панга жана сорубанга окшош эсептөө куралдарын пайдаланышкан. Бул «зымдарда эсеп жүргүзүү жолу» деп аталып, анын мазмуну төмөнкүдөй болгон.

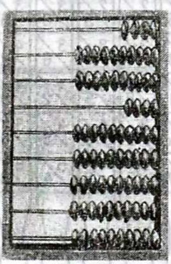
Эсеп жүргүзүүчүнүн алдына солдон оңго кеткен жарыш зымдары бар такта коюлат. Биринчи зымда бирдиктерди белгилеген таштар коюлган беш бирдиктин ордуна биринчи жана экинчи зымдардын ортосуна таш коюлган. Экинчи зымда ондуктарды белгилеген таштар коюлган, экинчи жана үчүнчү зымдардын ортосундагы таштар 50 нү белгилеген, ошентип уланып кете берет. Суан-пан жана сорубанды пайдалануу Римдик номерлөөгө толук ылайык келет.

2.2.5. ЧОТ

Орус эли ондук эсептөө системасында эсеп жүргүзүүнү жеңилдетүү үчүн эң сонун курал **чотторду** ойлоп табышкан. Кээ бир маалыматтар боюнча чоттор XIV кылымда пайда болгон деп айтылат, кээ бир малыматтарда XVII кылымда Петр 1дин убагында пайда болгон деп айтылган. Көп окумуштуулардын жыйынтык чыгарышы менен XVI кылымда пайда болгон деп айтылат. Орус чотторун Европага XIX кылымда Франция математиги Ж. Понселе алып барган. Чоттор «булье» деп аталып атайын программа боюнча Франциянын ошондой эле башка Европанын мектептеринде окутула баштады. Орус чоттору менен азыр ушул убакытка чейин пайдаланышат. Чоттор арифметика сабагында программага киргизилип көпкө чейин окутулган. Кыргыз Республикасынын төмөнкү класстарынын программаларынан дагы жетимишинчи жылдары гана алынган. Ар бир эсептөөнү үйрөнгүсү келген киши чоттор менен эсептөөнү жакшы билүүгө аракеттенген. Совет доорунун улуу акыны В. В. Маяковский төмөндөгү ыры менен эсептөөнү жакшы үйрөнүүгө чакырган:

«Майданга чык!
Чоттор менен куралданып. . .»

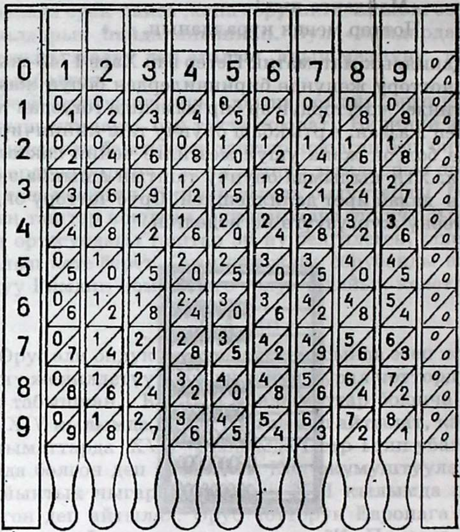
Даниялык математик Петер ван Хаве 1743-жылы орус чоттору жөнүндө биринчилерден болуп жазган эмгегинде, чотттордун ар бир зымында тогуздан таш бар деп жазган. Артыкбаш онунчу таш кийинчирээк пайда болгон жана ушул мезгилге чейин сакталып келди. XIX кылымда онунчу таштын ашыкча экендигин далай ирет далилдешкен. Орус чоттору ондук эсептөөнү жүргүзүүгө негизделген.



15-сүрөт. Орус чоту.

2.2.6. НЕПЕР ТАЯКЧАЛАРЫ

Сандарды көбөйтүү үчүн жөнөкөй куралды биринчи жолу шотландиялык математик Джон Непер 1617-жылы ойлоп тапкан, жана «Непер таякчалары» деп аталат. Андан бери ал курал бир топ өзгөртүлүп, жакшыртылган. Бул курал он кыймылдоочу сызгычтары бар, жөнөкөй көбөйтүүнүн таблицасы сыяктуу көрүнөт. Ар бир клеткадагы кыйгач сызыктын үстүндө ондуктар жазылган ал эми кыйгач сызыктын ылдый жагында бирдиктер жазылган.



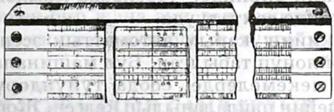
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0/0
1	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9	0/0
2	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8	0/0
3	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7	0/0
4	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6	0/0
5	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5	0/0
6	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4	0/0
7	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3	0/0
8	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2	0/0
9	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1	0/0

16-сүрөт. Непер таякчалары.

Мисалы 34 менен 6 ны көбөйтүү керек болсун. Кыймылдуу линейканын жардамы менен өйдө жагынан 34 тү алабыз ал эми кичине ылдый жагынан 6 ны коёбуз. Бул жазуулар менен клетканы сызабыз. Көбөйтүндүнүн жыйынтыгы болуп диагоналдардын сызыктарынын арасындагы сандардын суммасы болот.

2.2.7. ЛОГАРИФМДИК СЫЗГЫЧ

Жөнөкөй логарифмдик сызгыч, көбөйтүү, бөлүү, даражага көтөрүү, тамыр чыгаруу ж.б.у.с. анчалык татаал эмес эсептөөлөр жүргүзүлүүчү эсептөө куралы. Ал тулкудан (корпус), жылдырылуучу сызгычтан жана визирден (көрсөткүч) турат. Логарифмалык сызгычты Англия математиги Э. Гантер 1623-жылы ойлоп тапкан. Ошол мезгилде сандарды кошуу циркулдун жардамы менен жүргүзүлгөн. 1630-жылы У. Отред циркулду жылдырыла турган сызгыч менен алмаштырган. 1850-жылы визир-көрсөткүчү кошулуп, логарифмдик сызгыч пайдаланууга ыңгайлуу болуп калган. Логарифмдик сызгыч микрокалькуляторлор чыкканга чейин дүйнө жүзүндөгү бардык орто мектептерде окуу планына киргизилип окутулган. Ошондой эле ар кандай инженердик ж.б. эсептөөлөрдө кеңири пайдаланылган.



17-сүрөт. Логарифмдик сызгыч.

2.2.8. ЭСЕПТӨӨЧҮ МАШИНАЛАР

Биринчилерден болуп эсептөөчү машина француз окумуштуусу **Блез Паскаль** тарабынан он жети жаш курагында 1641-жылы конструкцияланган. Ал механикалык машина аркылуу кошуу жана кемитүү амалдары аткарылган. Б. Паскалдын атасы налог чогултуучу болуп иштегенден кийин ага керелден-кечке арифметикалык амалдарды аткарууга туура келген. Уулунун ойлоп табуусу атасы үчүн чоң жардам болгон.

Немец математиги **Г. Ф. Лейбниц** 1671-жылы «Паскалдын машинасын» кайра иштеп, өркүндөтүлгөн түрүн жасаган. Бул машина менен төрт арифметикалык амалдарды аткарууга мүмкүн болгон.

Практикалык максаттар үчүн ыңгайлуураак **арифмометр** 1820-ж. Томас де Кольмар тарабынан конструкцияланган. Арифмометрдин көп жетишпеген жактары болгон.

Россияда XIX кылымдын биринчи жарымында өнөр жай өндүрүштөрү өнүгө баштайт. Бир катар арифмометрлер чыгарылат. Инженер В. Т. Однер (Швецияда төрөлгөн, швед, 1845—1905) тарабынан Петербургда 1874 жылы жасалган арифмометр өлкөлөргө массалык түрдө тараган. П. Л. Чебышев тарабынан ойлонуп табылган, механикалык түрдө амалдарды аткарууга ылайыкталган арифмометр (1878-жылы), өзүнүн ыңгайлуулугу менен айырмаланат. Азыр П. Л. Чебышевдин арифмометри Париждин музейлеринин биринде, Москвада мамлекеттик тарых музейинде сакталууда.

Андан кийин жарым автоматтык эсептөөчү машиналар ойлонуп табылган. Бул машиналар бардык эсептөөчү мекемелерде, соода түйүндөрүндө ЭЭМ чыкканга чейин пайдаланылып келген. Жогорку окуу жайларында анын ичинде Кыргыз Республикасында бардык эле советтик мамлекеттердегидей эле эсептөө техникасын окутууда 1970 -жылдарга чейин жарым автоматтык эсептөөчү машиналар колдонулган.

Биринчилерден болуп англиялык окумуштуу Чарльз Беббедж 1833-жылы программалык башкарууда иштей турган эсептөөчү машиналарды сунуш кылган. Бирок ошол убактагы техниканын мүмкүнчүлүгү ал идеяны иш жүзүнө ашырууга жеткен эмес. 1880-жылдары Японияда 8 разряддагы сандар менен арифметикалык төрт амалдарды аткаруучу **БЗ-04 микрокалькуляторлорун** массалык түрдө чыгарышкан.Клавишалуу калькуляторлар бухгалтердик эсептөөлөрдө колдонулган.

Биринчи жолу чоң **электрондук эсептөөчү машиналар** МАРК-1, АКШ да 1944 ж. чыккан. Инженер Дж. Пресли жана физик Дж. У. Мокли тарабынан 1945-ж. өркүндөтүлгөн түрү чыккан, ал ЭНИАК — электрондук цифралык интегратор жана эсептөөчү деп аталган. Андан кийин АКШдан чоң ЭЭМдердин өркүндөтүлгөн түрлөрү 1952-ж. МАНИАК -1, 1957-жылы МАНИАК-2 чыккан.

СССРде академик С. А. Лебедев жетекчилиги менен окумуштуулар жана инженерлер коллективи 1953-жылы БЭСМ-1 электрондук эсептөөчү машиналарды ойлоп табышкан. Булар биринчи муундагы ЭЭМдер деп аталат. Ошол убактан бери ЭЭМ дин өркүндөтүлгөн ар кандай түрлөрү чыгып жатат. Адам өзү жекече компьютери менен үйдө олтуруп жер шаарынын каалаган жериндеги информацияларды биле алат. Бул боюнча информатика сабагынан кеңири түшүнүктөр берилет. Демек, адам баласы эмгектин аркасы менен, практикалык муктаждыктардан манжалар менен бир жана эки деп эсептөөдөн азыркы илимий жетишкендиктерге жетүүгө мүмкүнчүлүк алышты.

2.3. НАТУРАЛДЫК САНДАРДЫН АЙРЫМ КАСИЕТТЕРИНИН ТАРЫХЫ

2.3.1. ЭСЕПТИК ЖАНА ИРЕТТИК САНДАР. ТАК ЖАНА ЖУП САНДАР

Башталгыч арифметикада натуралдык катар деп аталган 1, 2, 3, 4, . . . натуралдык сандардын кээ бир касиеттери каралат. Натуралдык сандардын касиеттерин өздөштүрүү жана аны эсептей билүү байыркы убактарда өнүгүүнүн узак мезгилин талап кылган.

Сандарды кандайдыр бир нерселерди эсептөөдө жана иретин, турган ордун билүүдө пайдалана тургандыгын адамдар байыркы мезгилде эле билишкен.

Сандарды эсептик (кардиналдуу) жана иреттик (ординалдуу) деп бөлүп, колдонуп келишкен. Бул терминдер байыркы шумерлердин, египеттиктердин, гректердин жана латындын тилдеринде кездешет. «Кардиналдуу» жана «ординалдуу» сандар деген терминдер биринчи жолу рим грамматикасында, Присциандын (441—518) эмгектеринде берилет.

Райнддын папирусундагы таблицада (биздин эрага чейин 1700-жылдар) алымы 2, бөлүмү 5 тен 99 га чейин так сандар болгон бөлчөк сандар берилген, ал эми бөлүмү жуп сандар болгон бөлчөктөр таптакыр берилген эмес, мындан байыркы Египеттиктерге жуп жана так сандар белгилүү болгондугу көрүнүп турат.

Сандарды так жана жуп сандарга бөлүү Пифагор жана анын окуучуларына таандык деп эсептелинет. Пифагордун мектеби (биздин эрага чейин VI—V кылым) жуп жана так сандарды бири-бирине карама-каршы коюп таблица түзүшкөн.

Платон өзүнүн убагында, арифметика бул так жана жуп сандар жөнүндөгү илим, деп айткан. Ошондой эле Платон жуп сандар жөнүндө аныктаманы берет, жуп жана так сандардын бирдей санда экендигин айтат. Евклид жуп сандар жөнүндөгу Платондун аныктамасын кабыл алат жана так сандарды жуп сандарга бирди кошуу менен алууга болот деген.

Сандардын жуп жана так сандарга бөлүнүшү, сандар жөнүндөгү илимдин, б. а. арифметиканын теориялык тарыхынын башталышы болуп калды.

2.3.2. ЖӨНӨКӨЙ ЖАНА КУРАМА САНДАР

Пифагор биздин заманга чейин (б.з.ч.) VI кылымда арифметикага сандарды жөнөкөй жана курама сандарга бөлүүнү киргизген. Жөнөкөй сандар деп бирге жана өзүнө гана бөлүнүүчү сандар айтылат. Ал эми бирге жана өзүнөн башка сандарга бөлүнүүчү сандарды курама сандар деп айтышкан. Жөнөкөй сандар, алардан калган бардык сандар түзүлө турган «кирпичтей болгон сандар» дешкен.

Пифагор тарабынан сандарды жөнөкөй жана курама сандарга бөлүүнүн киргизилиши сандарды теориялык жактан үйрөнүүгө чоң салым кошкон.

Азыркы кезде натуралдык сандарды үч түргө ажыратып бөлөт:

1) бир гана бөлүүчүсү бар 1 саны;

2) 1ден жана сандын өзүнөн турган эки бөлүүчүсү бар жөнөкөй сандар;

3) экиден ашык бөлүүчүсү бар курама сандар.

1 санын өзүнчө бөлүнүп жазылганы, себеби жөнөкөй сандардын касиеттери 1 саны үчүн туура келбейт. Эгерде 1 санын жөнөкөй сандардын тобуна кошсок, анда көп теоремаларда 1 деген сандын касиеттерин өзгөчө эскертип кетүү керек. Байыркы гректердин математиктери, мындай иштешкен эмес, себеби алар сан деп бирдиктердин көптүгүн айтышкан.: алар 1ди сан катарында эсептешкен эмес да 1ди сандар түзүлө турган элемент, атом дешкен.

Грек математиги Евклид (б.з.ч. 300-жылдар) жөнөкөй сандар чексиз көп экендиги жана баарынан чоң болгон жөнөкөй сан жок экендигин далилдеген. Евклиддин «Башталмасындагы» бул теорема «Эң чоң жөнөкөй сан жок» деген теорема менен тең күчтө. Мында жөнөкөй сандардын чексиз көп экендиги далилденет.

Андан кийин грек математиги Эратосфен (б.з.ч. 200-жылдар) натуралдык сандардын катарынан жөнөкөй сандарды бөлүп алуунун жолун берген. Ал «Эротесфендин торчосу» деп аталып калган. Эротесфен натуралдык катардагы сандарды жазып, 2 ден баштап, бир сандан кийинкисин сызып таштайт, андан кийин 3 төн баштап, эки санды сызып таштайт, 5 тен баштап, төрт санды сызат. Мында сызылбаган сандар, жөнөкөй сандарды берет.

Мисалы: 1 менен 40 чейинки сандардын ортосундагы жөнөкөй сандарды табуу керек болсун. Жогорудагыдай сызууларды жүргүзүп, төмөндөгү жөнөкөй сандарды алабыз:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37.

Эротесфендин убагында буладан жасалган доскаларга жазышкан, сандарды сызуунун ордуна жөн эле тешип коюшкан, мына ошондуктан, торчодон өткөрүү деген сөз калган.

«Эротесфендин торчосу» методу менен жөнөкөй сандардын таблицаларын түзө башташат. Италия математиги Катальди (1603 ж.) 750 гө чейинки жөнөкөй сандардын таблицасын түзгөн. Швейцария математиги Ламберт (1770 ж.) 102 000 ге чейинки жөнөкөй сандардын таблицасын түзгөн.

XIX кылымдын ичинде 1 ден 12 000 000 ге чейинки сандардын ортосундагы жөнөкөй сандардын таблицасын түзүшкөн.

Жөнөкөй сандардын таблицасын түзүү боюнча чыныгы баатырдык жасаган Прагадагы чех университетинин профессору Якуб Филипп Кулик (1793-1863 жж.) болгон. Ал 1 ден баштап 100 330 201 ге чейинки, жөнөкөй сандардын таблицасын түзүп, эч кандай печатка чыгарбай, Вена Илимдер Академиясынын китепканасына пайдаланууга койгон.

Таблица № 1

Натуралдык катардын аралыгында жөнөкөй сандардын бөлүштүрүлүшүнүн таблицасы:

Натуралдык катардын аралыгы	Бул аралыктагы жөнөкөй сандар	1 менен аралыктын аягынын ортосундагы жөнөкөй сандар
1 ден 10 гө чейин	4	4
10 дон 20 га чейин	4	8
20 дан 30 га чейин	2	10
30 дан 40 ка чейин	2	12
40 тан 50 ге чейин	3	15
50 дөн 60 ка чейин	2	17
60 тан 70 ке чейин	2	19

70 тен 80 ге чейин	3	22
80 ден 90 го чейин	2	24
90 дон 100 гө чейин	1	25
1 ден 100 гө чейин	25	25
100 дөн 200 гө чейин	21	46
200 дөн 300 гө чейин	16	62
300 дөн 400 гө чейин	16	78
400 дөн 500 гө чейин	17	95
500 дөн 600 гө чейин	14	109
600 дөн 700 гө чейин	16	125
700 дөн 800 гө чейин	14	139
800 дөн 900 гө чейин	15	154
900 дөн 1000 ге чейин	14	168
1 ден 1 000 000 го чейин	78498	78498
1 000 000 дон 2 000 000 го чейин	70435	148933
2 000 000 дон 3 000 000 чейин	67883	216816
3 000 000 дон 4 000 000 го чейин	66330	283146
4 000 000 дон 5 000 000 го чейин	65367	348513
5 000 000 дон 6 000 000 го чейин	64336	412849
6 000 000 дон 7 000 000 го чейин	63799	476648
7 000 000 дон 8 000 000 го чейин	63129	539777
8 000 000 дон 9 000 000 го чейин	62712	602489
9 000 000 дон 10 000 000 го чейин	52090	664579

Жөнөкөй сандардын натуралдык сандардын катарында улам сейрек учурай тургандыгын жана бир калыпта эместиги таблицадан көрүнүп турат. Эң көрүнүктүү математиктер жөнөкөй сандардын бөлүштүрүлүшүнүн сырын чечүүгө умтулушкан.

Мисалы, өз алдынча окуп үйрөнгөн математик И. М. Первушин (1883-ж.),

$2^{61}-1=2\ 305\ 843\ 009\ 213\ 693\ 951$ — саны жөнөкөй сан экедигин далилдеген.

Математиканын бул эң кыйын маселесин чечүүдөгү эң ири натыйжа П. Л. Чебышевге таандык болгон. 1849-жылы П. Л. Чебышев 1 менен ар кандай x санынын ортосундагы жөнөкөй сандардын санын эң тактык менен аныктоо боюнча формуланы чыгарды.

Электрондук эсептөөчү машиналардын өнүгүшү менен жөнөкөй сандардын табуу жеңил болуп калды.

Андан кийин, азыркы мезгилде 1957-ж табылган эң чоң жөнөкөй сан $2^{2281}-1$ болуп саналат. Бул сан 750 цифрадан турат.

Андан кийин ушул эле жылы эң чоң жөнөкөй сан $2^{3217}-1$ экендиги табылды, бул сан 1000 цифрадан турат. Бирок бул жөнөкөй сан менен жөнөкөй сандар түгөнбөйт, себеби ар бир жөнөкөй сандан кийин башка жөнөкөй сан келет, ал чексиз.

Француз математиги Бертран (1822—1900): «1 ден 6 000 000 ге чейинки бардык сандардын ар бир x саны үчүн, x жана 2x—2 сандарынын ортосунда жок дегенде бир жөнөкөй сан бар» деп, бул закон ченемдүүлүктү текшерип чыккан. Бул болжолдоону (постулат) «Бертрандын постулаты» деп аташкан.

П. Л. Чебышев Бертрандын болжолдоосун далилдөө менен аны теоремага айландырды.

2.3.3. ЖӨНӨКӨЙ САНДАР ЖӨНҮНДӨ ЭЙЛЕРДИН — ГОЛЬДБАХТЫН — ВИНОГРАДОВДУН ТЕОРЕМАСЫ

Жөнөкөй сандар жөнүндө бир катар теоремалар бар.

Алардын бири болуп, Эйлердин-Гольдбахтын-Виноградовдун теоремасы эсептелинет.

Петербург илимдер Академиясы 1725-жылы негизделген. 1742-жылы Л. Эйлер, өзү менен чогуу Петербург илимдер Академиясында иштеген Гольдбахка жазган катында мындай дейт: «Алтыдан тартып, ар кандай жуп сан жөнөкөй эки так сандын суммасы болуп саналат» деген теореманы анык деп эсептейм, бирок далилдей албайм.

6=3+3, 8=3+5, 10=3+7, 12=5+7 ж.б.у.с.

Эгерде бул теорема анык болсо, анда бул теоремадан ар кандай так сан жөнөкөй үч сандын суммасы болуп саналат деген корутунду чыгат.

Бул теореманы жуп сандар үчүн көп математиктер текшеришкен. 1940-жылы текшерүү 100 000 жуп санына чейин жеткен.

Эйлер-Гольдбах-Виноградовдун теоремасынын жуп сандар үчүн тууралыгын текшерүү төмөндөгүдөй жүргүзүлөт. Мисалы 50 саны үчүн теореманы текшерели. Ал үчүн эки жолчосу бар таблицаны түзөлү. Биринчи жолчого 49 санынан баштап азайып кетүүчү так сандарды, экинчи жолчого бирден баштап көбөйүүчү так сандарды жазабыз. Андагы жөнөкөй сандар белгиленет.

49	**47**	45	**43**	41	39	**37**	35	33	**31**	29	27	25
1	**3**	5	**7**	9	11	**13**	15	17	**19**	21	23	25

50 деген санда мындай бөлүшүүлөр, төрт жолу учурайт, атап айтканда: 3+47, 7+43, 13+37, 19+31. Ушул эле жол менен ар кандай жуп сандар үчүн текшерүүгө болот.

Теореманы далилдөөгө көп аракеттер жасалган, бирок натыйжасыз болду.

1922-жылы эң ири Англиялык математик Харди, бул теореманы далилдөө үчүн азыркы кездеги математика жетишсиздик кылат деп билдирүүгө мажбур болгон. Маселени чечүү үчү математикада жаңы методдорду түзүү керек болду. 1930-жылы советтик математик Л. Г. Шнирельман (1905—1938) керектүү жаңы методдорду түзө баштаган.

1937-жылы И. М. Виноградов ар кандай «жеткилең түрдө чоң» болгон так сан, жөнөкөй үч так сандын суммасы боло тургандыгын далилдеди. Бул сүйлөмдүн далилдениши менен Эйлер-Гольдбахтын теоремасын далилденди деп эсептесе болот. И. М. Виноградовдун далилдөө методун табышы, бүткүл дүйнөнүн көңүлүн бурду.

И. М. Виноградов аналитикалык сандар теориясындагы жөнөкөй сандар менен тригонометриялык суммаларды баалоо методу менен аныктаган жана асимптоталык формуласын берген. Бул формуладан кийин ар кандай жеткилең түрдө чоң болгон так санды жөнөкөй үч сандын суммасы түрүндө көрсөтүүгө мүмкүн болуп калды.

2.3.4. КУРАМА САНДАРДЫН БӨЛҮНҮҮЧҮЛҮГҮ

Биздин доорго чейин эле гректер, бөлүү амалын аткарбай туруп, *a* натуралдык санынын *b* натуралдык санына бөлүнө тургандыгын биле турган жалпы эрежелерин табууга аракеттенишкен. Ошондой эле нөл саны каалагандай санга бөлүнөөрү жана жыйынтыгы 0 болору белгилүү болгон.

2 ге бөлүнүүчүлүктүн белгиси, «бардык жуп сандар экиге бөлүнөт» байыркы Египеттиктерге биздин доорго чейин 200-жылдары эле белгилүү болгон.

9 га бөлүнүүчүлуктүн белгиси гректерге биздин эрага чейин III кылымда белгилүү болгон. 3 кө бөлүнүүчүлүктун белгиси Л. Пизанскийдин 1228-жылдардагы эмгектеринде жана И. Неморариянын (1237-ж. каза болгон) эмгектеринде берилген. Азыркы учурда 3 кө жана 9 га бөлүнүүчүлүктүн белгилери чогуу каралат.Ал төмөндөгүчө айтылат: «берилген сандын цифраларынын суммасы 3 кө (9 га) бөлүнсө, анда ал сан 3кө (9 га) бөлүнөт».

5 ке бөлүнүүчүлүктүн белгилери «акыркы цифралары 0 жана 5 менен аяктаган сандар 5 ке бөлүнөт», Индияда белгилүү болсо дагы адабияттарда биринчи болуп Л. Пизанскийдин эмгектеринде берилет.

11 ге бөлүнүүчүлүктүн белгисин 1010-жылдары араб илимпозу А. Кархи карайт жана текшерүүнү 11 ге бөлүү аркылуу жүргүзөт. Ал эми далилдөөсү биринчи жолу 1767-жылы Карстендин китебинде берилет. Лагранждын элементардык математикадан 1794-жылы жасаган лекциясынан кийин башка окуу китептеринде жарыяланган. Ал төмөндөгүчө айтылат: «эгерде берилген сандын жуп орунда турган цифраларынын суммасы, так орунда турган цифраларынын суммасынын айырмасы 11 ге бөлүнсө, анда берилген сан 11 ге бөлүнөт».

Ал эми 7 ге жана 8 ге бөлүнүүчүлүктүн белгилерин мароккалык илимпоз ибн-Албана толук карап чыккан.

Каалагандай сандын жалпы бөлүнүүчүлүк белгисин биринчи жолу 1654-жылы Б.Паскаль берет.

Эки сандын эң чоң жалпы бөлүүчүсүн удаалаш бөлүү аркылуу табуунун алгорифмин Евклид биздин доорго чейин эле өзүнүн «Башталмасынын» VII китебинде берет.

Эки натуралдык сандын эң чоң жалпы бөлүүчүсүн табуу үчүн:

1) чоң санды кичинесине бөлүү; 2) кичине санды биринчи калдыкка бөлүү; 3) биринчи калдыкты, экинчи калдыкка бөлүү.

Евклиддин алгорифми (алгоритми) азыркы учурда «Элементардык математика» курсун окуган жогорку жана атайын окуу жайларынын студенттерине окуу программасы боюнча берилет.

Акырындап Индияда удаалаш бөлүү жолу колдонула баштайт. Бул XII кылымдагы Бхаскаранын эмгектеринен көрсө болот.

Евклид ошол эле VII китебинде эң кичине жалпы бөлүнүүчү жөнүндө түшүнүк берет.

Ошондой эле Евклиддин VII китебинде «эгерде эки сандын көбөйтүндүсү жөнөкөй санга бөлүнсө анда эки сандын жок дегенде бирөө ушул жөнөкөй санга бөлүнөт» деген сүйлөмдү берет. Бул сүйлөм XIX кылымда сандар теориясынын жогорку бөлүгүн түзүүгө негиз болду.

Курама сандардын бөлүнүүчүлүгү боюнча ар кандай суроолор чечилген. Ньютон Кастиллион (1761-ж.) өзүнүн эмгектеринде курама сандардын бардык бөлүүчүлөрүн табуунун формуласын төмөндөгүдөй берет.

Эгерде N саны жөнөкөй көбөйтүүчүлөргө төмөндөгүдөй ажыраса, б. а.

$$N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k} \quad (1)$$

болсо, анда анын бөлүүчүлөрүнүн саны

$(a_1+1)(a_2+2)\ldots(a_k+1)$ ге барабар.

Мисалы: 1) $15=3\cdot5$, бөлүүчүлөрүнүн саны $(1+1)(1+1) = 4$ болот.

Алар, 1, 3, 5, 15.

2) $48 = 2^4\cdot3$, бөлүүчүлөрүнүн саны $(4+1)(1+1) =$ 10 болот.

Алар, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

1658-жылы Валлис (Уоллис) N санынын бардык бөлүүчүлөрүнүн суммасынын санын табуунун формуласын берет.

Эгерде саны N жөнөкөй көбөйтүүчүлөргө (1) болгондой ажыраса, анда N санынын бардык бөлүүчүлөрүнүн суммасы төмөндөгүгө барабар болот

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$$

Мисалы: $48 = 2^4\cdot3$, санынын бөлүүчүлөрүнүн суммасы:

$$\frac{2^5-1}{2-1}\cdot\frac{3^2-1}{3-1}=31\cdot4=124.$$

Чындыгында эле 48 тин бөлүүчүлөрүнүн суммасы, $1+2+3+4+6+8+12+16+24+48= 124$ болот.

Достук деген эмне деген суроого, Пифагор «220 жана 284» деп жооп бериптир. Себеби, алардын ар биринин бөлүүчүлөрүнүн суммасынан өзүн кемитсе анда кийинки сан келип чыгат:

1) $220= 2^2\cdot5\cdot11$, ал эми анын бөлүүчүлөрүнүн суммасы төмөндөгүгө барабар,

$$\frac{2^3-1}{2-1}\cdot\frac{5^2-1}{5-1}\cdot\frac{11^2-1}{11-1}=7\cdot6\cdot12=504$$

$504-220=284$.

2) $284 = 2^2\cdot71$, анын бөлүүчүлөрүнүн суммасы төмөндөгүгө барабар,

$$\frac{2^3-1}{2-1}\cdot\frac{71^2-1}{71-1}=7\cdot72=504$$

$504-284=220$.

2.3.5. ЖЕТКИЛЕҢ, ЭҢ КИЧИНЕ ЖАНА ЖЕТКИЛЕҢ ТҮРДӨГҮ ЧОҢ САНДАР

Евклид «Башталмасынын» VII китебинде «жеткилең», «эң кичине» жана «жеткилең түрдөгү чоң» сандарга аныктама берген.

Эгерде каалагандай натуралдык сандын өзүнөн башка бөлүүчүлөрүнүн суммасы өзүнө барабар болсо, анда ал сан жеткилең сан деп аталат.

Ал төрт жеткилең санды көрсөткөн:

6, 28, 496, 8128.

Өзүнөн башка бөлүүчүлөрүнүн суммасы өзүнө барабар экендигин текшерели:

$6 = 1+ 2 + 3;$

$28= 1+ 2+ 4 + 7 + 14.$

496 санын көбөйтүүчүлөргө ажыраталы. $496 =2^4 \cdot 31$, 496 санын бөлүүчүлөрүнүн суммасы:

$$\frac{2^5-1}{2-1} \cdot \frac{31^2-1}{31-1} = 31 \cdot 32=992$$

Өзүнөн башка бөлүүчүлөрүнүн суммасын табуу керек болгондуктан, суммадан өзүн кемитебиз:

992—496=496.

Эгерде өзүнөн башка бөлүүчүлөрүнүн суммасы өзүнөн кичине (чоң) болсо эң кичине (жеткилең түрдөгү чоң) сан деп аталат.

Мисалы: 12 саны жеткилең түрдөгү чоң сан:

$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16.$

8 эң кичине сан:

$1 + 2 + 4 = 7.$

I кылымда грек математиги Никомах Геразский төмөндөгүдөй деп жазат: «Жеткилең сандар сулуу. Бирок, белгилүү болгондой, сулуу, кооз буюмдар аз, ал эми түрү суuктар көп жана ашыгы менен кездешет. Сандардын көбү жеткилең түрдөгү чоң же эң кичине, ошол эле убакта жеткилең сандар абдан аз. Бир орундуу сандардын арасынан жалгыз — 6, эки орундуу сандардын арасынан жалгыз — 28, үч орундуу сандардын арасынан жалгыз — 496, төрт орундуу сандардын арасынан жалгыз — 8128».

Жеткилең сандар гректердин легендаларында айтылат. Платон тарабынан жомоктогудай мамлекет Атлантиданын алтын кылымын сүрөттөгөн, өз ара сүйлөшүүлөрүндө өзгөчө «Тимей» сүйлөшүүсүндө 6 санынын артыкчылыгы айтылат.

Римдиктерде конокто олтурганда эң ардактуу орун 6 чы болгон.

Евклид «Башталмасынын» IX китебинде төмөндөгү теореманы далилдейт:

«Эгерде $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} — 1$ жөнөкөй сан болсо,

анда: $N = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) \cdot 2^n = 2^n \cdot (2^{n+1} — 1)$ саны, жеткилең сан болот».

Ал эми Эйлер тескери теоремасын далилдейт: «Каалагандай жеткилең жуп сан: $2^n (2^{n+1} — 1)$ болот, мында — $2^{n+1} — 1$ жөнөкөй сан».

Ал эми жеткилең так сандардын бар экендиги белгисиз.

Никомахтын жеткилең сандар же 6, же 8 цифрасы менен аяктайт деп айтканы, туура эмес болуп чыкты.

Жеткилең сандарды изилдөө боюнча көп математиктер иштеген.

Алардын арасында Ферма, Декарт, Мерсень, Эйлер, Сильвестер, Катальди ж. б. болгон.

1952-жылга чейин 12 жеткилең сан белгилүү болгон.

1952-жылы электрондук эсептөөчү машиналар аркылуу дагы 5 жеткилең сан табылган.

1957-жылы он сегизинчи жеткилең саны табылган.

Ал : 2^{3216} (2^{3217} —1). Бул 2000 цифрадан турат

2.3.6. КӨП БУРЧТУУ ЖАНА ФИГУРАЛУУ САНДАР

Биздин доорго чейин 2000—1500 жылдар мурда «вед» деп аталган байыркы индус китептеринде бир фигураны ага барабар чоңдукта болгон экинчи фигура менен алмаштыруу үчүн жана ал фигураларды кошуу же бөлүү үчүн кеңири жазылган эрежелер бар.

Курулуш искусствосу квадрат формасындагы плиталардан квадрат, үч бурчтук, төрт бурчтуктарды жыйнап түзүүнү талап кылган.

Мында негизинен жактары бүтүн сандар менен белгиленген төмөндөгү түрдөгү тик бурчтуу үч бурчтуктарды пайдаланышат:

1) жактары 3, 4, 5 сандары болгон жана 3, 4, 5 деген сандарды бирдей санга көбөйтүүдөн алынгандар;

2) жактары 5, 12, 13 болгон жана аларды бирдей санга көбөйтүүдөн алынгандар;

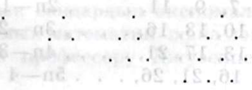
3) жактары 8,15,17 болгон жана аларды бирдей санга көбөйтүүдөн алынгандар;

4) жактары 12, 35, 37 болгон жана аларды бирдей санга көбөйтүүдөн алынгандар.

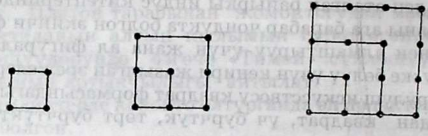
Фигуралуу сандар жөнүндөгү илим Грецияда өнүккөн. Өзгөчө Пифагор (биздин доорго чейин VI кылым) жана анын мектеби иштеген. Алар сандарды геометриялык сүрөттөөлөр аркылуу беришкен. Мындай сандар көп бурчтуу (полигондуу) деп аталган. Нөл санын nulla figura — фигура эмес (цифра) дешкен.

Көп бурчтуу сандардын эң жөнөкөйү болуп, үч бурчтуу сандар болгон. Төмөндөгү удаалаштыктагы сандар, үч бурчтуу сандар деп аталган жана төмөндөгү түрдө берилген.

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, . . .

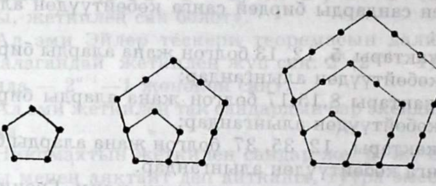


Ал эми, 1, 4, 9, 25, 36, . . . удаалаштыгындагы сандарды төрт бурчтуу же квадрат сандар деп аташкан.



18-сүрөт. Төрт бурчтуу сандар.

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, . . . удаалаштыгындагы сандар беш бурчтуу сандар деп аталат.



19-сүрөт. Беш бурчтуу сандар.

Көп бурчтук канча бурчтуу болсо ошол сандар менен көп бурчтук берилет.

Көп бурчтуу сандардын катарын алыш үчүн, натуралдык сандардын катарын алабыз жана натуралдык сандардын ар бирине 2 ни, анан 3 тү ж. б. у. с. n ди кошуу менен жана ар биринен бирди кемитип төмөндөгү удаалаштыктарды алабыз.

1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . , n, . . .
1, 3, 5, 7, 9, 11, . . . , 2n—1, . . .
1, 4, 7, 10, 13, 16, . . . , 3n—2, . . .
1, 5, 9, 13, 17, 21, . . . , 4n—3, . . .
1, 6, 11, 16, 21, 26, . . . 5n—4

Көп бурчтуу сандардын удаалаштыгын жазуу үчүн, жогорудагы ар бир удаалаштыктарды төмөндөгүдөй удаалаштыктар менен алмаштырабыз: удаалаштыктардын биринчи мүчөлөрүн өзүн жазабыз; андан кийин биринчи менен экинчи мүчөсүн кошуп, удаалаштыктын экинчи мүчөсүнө жазабыз; биринчи, экинчи жана үчүнчү мүчөлөрүн кошуп үчүнчү мүчө кылып жазабыз ж. б. у. с. улантылат.

Мисалы: 1, 2, 3, 4, . . . , n, . . . удаалаштыгын карайлы.

$a_1=1,\ a_2=1+2=3,\ a_3=1+2+3=6,\ a_1=1+2+3+4=10...$

Төмөндөгү удаалаштыкты алабыз.

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, . . . үч бурчтуу сандардын катарын алабыз. Ушундай эле жол менен төмөндөгү удаалаштыктар алынат.

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, . . . үч бурчтуу сандар.
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, . . . төрт бурчтуу сандар.
1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, . . . беш бурчтуу сандар.
1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, . . . алты бурчтуу сандар.
1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, . . . жети бурчтуу сандар.

Ушул эле жол менен, каалагандай көп бурчтуу сандардын удаалаштыгын жазса болот.

Бул сандар Пифагор жана анын мектебинин эмгектеринен, грек математиктеринин (Эратосфен, Гипсикл) эмгектеринен кездешет. Грек математиги Диофант (III—IV кылымдар) көп бурчтуу сандар жөнүндө бизге чейин жеткен китепти жазган.

2.3.7. НАТУРАЛДЫК САНДАРДЫН АКСИОМАЛАРЫ

Ар кандай математикалык теориялардын аксиоматикалык түзүлүшү негизги түшүнүктөрдөн (объекттерден жана катыштардан) жана аксиомалардан турат.

Натуралдык сандардын аксиомаларынын системасы Италиялык математик жана логик Турин университетинин профессору Джузеппе Пеано тарабынан 1891-жылы «Сандар жөнүндө түшүнүк» деген макаласында берилген.

Пеано өзүнүн 5 аксиомасын макаласында төмөндөгүдөй формулировкалаган:

1. 0 бул натуралдык сан.

2. Натуралдык сандан кийинки келүүчү сан бул, натуралдык сан.

3. 0 саны эч бир натуралдык сандан кийин келбейт.

4. Ал эми бир натуралдык сан бир гана натуралдык сандан кийин келет.

5. Толук аксиома индукциясы.

Пеанонун аксималарынын алгачкы берилишинде биринчи элемент 1 эмес 0 болуп берилет. Азыркы математикада 0 натуралдык сан эмес бүтүн сандардын көптүгүнө кирет.

Азыркы окуу китептеринде натуралдык сандардын аксиомалар системасы жогорку берилгенден формасы боюнча айырмаланат.

Натуралдык сандар — бул ар кандай куру эмес N көптүгүнүн элементи, мында кээ бир a жана a^* элементтери үчүн «a^*, a дан кийин келет» катышы менен байланышы аткарылат жана төмөндөгү төрт аксиома канааттандырылат:

1. Эч бир натуралдык сандан кийин келбей турган 1 натуралдык саны жашайт, б. а. каалагандай a үчүн $a^* \neq 1$ ны алабыз.

2. Ар бир a натуралдык саны үчүн андан кийин келүүчү бир гана a^* натуралдык саны жашайт, б. а.

$$a = b \to a^* = b^*.$$

3. 1 ден башка каалагандай натуралдык сан бир гана жана сөзсүз түрдө бир гана натуралдык сандан кийин келет, б. а. эгерде $a^* \neq 1$

анда $a^* = b^* \to a = b$.

4. Индукция аксиомасы.

M — төмөндөгү касиеттерге ээ болгон N натуралдык сандардын көптүгүнүн камтылган көптүгү болсун:

а) 1, M көптүгүнө тиешелүү;

б) эгерде натуралдык саны M көптүгүнө тиешелүү болсо, анда a^* дагы M ге тиешелүү болот; анда M көптүгү бардык натуралдык санды камтыйт б. а. айтканда M көптүгү N натуралдык сандардын көптүгү менен дал келет.

1, 2, 3, 4, . . . символдору арифметиканын өнүгүү тарыхында айтылгандай көптөгөн кылымдардын ичинде негизделген. 1—4 аксиомаларынын негизинде натуралдык сандардын арифметикасын дедуктивдүү түрдө түзүүгө болот.

4- аксиоманын негизинде төмөндөгү сүйлөмдү далилдөөгө болот:

Эгерде n натуралдык сан жөнүндөгү каалагандай «T» теоремасы N көптүгүнүн n=1 бир элементи үчүн аткарылса жана ошол теореманы каалагандай n элементи үчүн да аткарылат деп болжолдоодон, n+1 үчүн дагы ошол сүйлөмдүн аткарылышы далилденсе, анда «T» натуралдык сандардын көптүгүнүн каалагандай элементи үчүн орундалат.

Бул сүйлөм 4 — аксиома менен эквиваленттүү болуу менен математикалык индукция принциби деп аталат. Математикалык индукция методу ушул принципке негизделген. Бул методдун жардамы менен көп теоремалар далилденет.

Индукция сөзү латын тилинен алынган, «inductio», «изилдеп билүү» дегенди билдирет.

2.4. БҮТҮН САНДАР ЖАНА АЛАР МЕНЕН БОЛГОН АРИФМЕТИКАЛЫК АМАЛДАР

2.4.1. ТЕРС САНДАРДЫН ПАЙДА БОЛУШУ

Жогоруда айтылгандай турмуштук керектөөдөн натуралдык сандар пайда болду. Натуралдык сандарды кеңейтүүдөн натуралдык сандардын көптүгү түшүнүгү келип чыкты.

Андан кийин нөл саны киргизилди. Математикалык маселелерди чыгарууда, сандардын көптүгүн кеңейтүүгө туура келди. Теңдемелерди чыгарууда кичине сандан чоң санды кемитүү талап кылынгандан терс сандар түшүнүгү киргизилди. Терс сандар киргизилгенден кийин кемитүү амалын аткаруу бардык учурда жеңил болуп калды.

Терс сандар кара таякчалар менен көргөзүлүп, оң сандар кызыл таякчалар менен көргөзүлгөн.

III кылымда эле грек математиги Диофант теңдемелерди чыгарууда , өзгөртүп түзүүлөрдө терс сандарга көбөйтүүнүн эрежелерин пайдаланган. Бирок терс сандар деген терминди киргизген эмес. Терс сандарды сан иретине кошкон эмес, теңдмелерди чыгарууда, терс тамырга ээ болсо аны жөн эле таштап койгон.

Индиялык математиктер VII кылымда эле теңдемелердин терс тамырга ээ боло тургандыгын айтышкан. Алар оң сандарды «мүлк» ал эми терс сандарды «карыз» деп айтышкан. Жана алар менен арифметиканын төрт амалын тең аткарышкан.

VII кылымдагы индия математиги Брахмагупта кошуу жана кемитүүнүн төмөндөгүдөй эрежесин берген.

Таблица №2

Брахмагуптанын эрежеси	Азыркы жазылышы ($a>0$, $b>0$).
1. Эки мүлктүн суммасы мүлк болот.	1. $a+b$
2. Эки карыздын суммасы карыз болот.	2. $(-a)-(-b)=-c$
3. Мүлк менен карыздын суммасы алардын айырмасына барабар.	3. $a+(-b)=a-b$
4. Мүлк жана ага барабар карыздын суммасы нөлгө барабар.	4. $a+(-a)=0$
5. Нөл менен карыздын суммасы карызга барабар.	5. $0+(-a)=-a$
6. Нөл менен мүлктүн суммасы мүлккө барабар.	6. $0+a=a$
7. Нөлдөн кемитилүүчү карыз, мүлк болуп калат.	7. $0-(-a)=a$
8. Нөлдөн кемитилүүчү мүлк, карыз болуп калат.	8. $0-a=-a$

Европада терс сандар XII—XIII кылымдарда Л. Фибоначчинин эмгектеринде кезиге баштайт.

XIV—XVI кылымдарда терс сандар «карыз» деп аталган. Ал эми кээ бир Европалык окумуштуулар терс санды «жалган» сандар, ал эми оң санды «чындык» сандар дешкен.

Немец математиги Михаил Штифель 1544 -жылы терс сандар жөнүндө, «жоктон кичине» деген аныктама берет. Ошондой эле ал: «Нөл, чындык жана абсурд сандарынын арасында жайланышат» деп айткан. М. Штифельдин терс сандар жөнүндөгү аныктамасы, терс сандарды теориялык жактан негиздөө үчүн чоң салым болгон. Адамдар көпкө чейин «жоктон кичине» деген түшүнүккө көнө алышкан жок.

XVII кылымда математика, механика, астрономиянын өнүгүшү менен терс сандар практикада көбүрөөк пайдаланыла баштады. Ал эсептөөлөрдү бир кыйла жеңилдеттүүгө мүмкүнчүлүк берди.

Ушул эле кылымда жөнөкөй эле тирлерде «—» белгиси менен алмаштыруудан качып, (—) белгисинин ордуна ÷ белгисин колдоно башташат. Бул белги айырманын ордуна кээ бир эсептөөлөрдө колдонулат. Л. Ф. Магницкийдин «Арифметика» китебинде айырма ÷ белгиси менен берилет.

XVII кылымдын 20-жылдарында Фламандиялык математик А. Жирар жана анын окуучусу Стевина теңдемелерди чыгарууда терс тамырларды, оң тамырлар менен бирдей колдонот. Ошондой эле 1626-жылы А. Жирар биринчи жолу кош белгини (±) төмөндөгүдөй формада берет:

+
же
—

Француз математиги, физиги жана философу Декарттын 1637-жылы оң жана терс сандардын координаттык тегиздикте сүрөттөлүшүн берүүсү терс сандарды толук түшүнүүгө алып келди. Бирок, Декарт дагы оң сандарды «чын» терс сандарды «жалган» деп атаган.

Оң жана терс сандардын илимий негиздеги теориясы, XIX кылымдын биринчи жарымында толук негизделген.

2.4.2. АРИФМЕТИКАЛЫК БЕЛГИЛЕР

Арифметикада колдонулуп жүргөн белгилердин кайдан чыккандыгын, дайыма эле так аныктоого болбойт. Кээ бир белгилердин чыгышы болжолдонот. XVIII кылымдан баштап, азыркы биз пайдаланган белгилер, бардык мамлекеттерде колдонула баштаган. Китептердин авторлору, бирдей белгилерди колдонууну талап кыла баштashкан.

Кошуу жана кемитүү белгилери. XIV—XV кылымдардагы математикалык эмес кол жазмаларда «жана» деген сөздүн ордуна t деген белгини пайдаланышкан («et» — жана, ооба), бул «кошуу же чоң» деген маанини түшүндүргөн. Бул t деген белгиден (+) белгиси келип чыккан болуш керек деген гипотеза бар.

Эл эми (—) белгисинин келип чыгышы соодага байланыштуу деген болжолдоо бар. Вино саткандар, винонун бочкасы бошогондо, ага сызыкча коюшкан да аны «кемитилди же кичине» дешкен. Кайра бочкаларды толтурганда үстүнө вертикалдык сызыкчаларды сызышкан. Ал (+) белгиси болуп, «кошуу» дегенди билгизген.

XV кылымдагы кээ бир математиктердин эмгектеринде (+) жана (—) белгилери пайда боло баштайт.

(+) жана (—) белгилерин эсептөөлөрдө колдонгон, биринчи китеп Грамматеус тарабынан 1518-жылы чыккан. XV кылымдагы Италиялык математиктер Кардано, Тарталья, Бомбелла кошуу (+) жана кемитүү (—) белгилеринин ордуна p (плюс) жана m (минус) тамгаларын колдонууну улантышкан.

Көбөйтүү жана бөлүү белгилери. Региомонтананын (1436—1476-жж.) жана кээ бир авторлордун эмгектеринде көбөйтүү белгиси точка менен берилет. XVI—XVII кылымда кээ бир авторлор көбөйтүүгө M (Multiplicatio) белгисин, бөлүүгө D (Divisio) белгисин колдонушкан.

Биринчи жолу көбөйтүүнүн «X» белгисин Аутрид (1631-ж.) киргизген. Лейбниц биринчи жолу көбөйтүү белгисинин ордуна точканы коюп жана точка көбөйтүүнүн белгиси экендигин белгилеп кеткен.

XIII кылымда Л. Пизанский арабдардан үйрөнүп, эсептөөлөрдө бөлүү амалын жазууда горизонталдык сызыкчаны колдонот.

Джонсон 1633-жылы биринчилерден болуп (:) белгисин колдонот.

Пелль (1610—1685-жж.) бөлүүнүн ÷ белгисин колдонууну сунуш кылат. Азыр кээ бир мамлекеттерде Пелльдин киргизген белгиси колдонулат.

Кашаа белгиси. Көп мүчөлөрдөн тамыр чыгаруудан, кашаалар пайда болгон деп айтсак болот. Шюке (1484-жылы). Көп мүчөлөрдөн тамыр чыгарыла турган учурда, көп мүчөнү кашаанын ичине жазышкан. Тамыр чыгарыла турган көп мүчөнүн үстүн сызыкча менен сызып, астына R тамгасын жазышкан.

Тегерек кашааны биринчи жолу Тартальи (1556-жылы) киргизген. 1544-жылы биринчи жолу кашааны тамыр чыгарууга керети жок учурда колдонгон. Ал кашааны туюнтманын астына койгон.

Фигуралуу кашааны биринчи жолу Виет колдонгон.

Латын кол жазмаларында кашаа «моюнтук», «чынжыр» (vincul) деп аталган. Бул термин XVII кылымдарда колдонулган.

Биринчи жолу Эйлер 1770-жылы кашаа (скобка) терминин колдонот. Ал немец тилинен «klammer» алынган. Эйлер өзүнүн бардык эмгектеринде кашааны бардык керектүү учурларда колдонот.

Ошондон баштап бардык математикалык китептерде кашаалар колдонула баштады.

Барабардык жана барабарсыздык белгилери. Биринчи жолу (=) белгисин англичан Р. Рикорд (1510—1558) жылы киргизген жана «эч бир эки барабар буюм өз-ара, эки параллель түз сызыктай бири-бирине барабар боло албайт» деген. Ошондуктан барабардык белгиси катары эки параллель кесиндини алган. Барабардык белгиси Рикорддун мүрзөсүндөгү ташка кесилип жазылган. Бирок (=) белгиси тез ала кабыл алынган жок. XV—XVII көп авторлор барабардык белгисинин ордуна | белгисин коюшкан же кыскача «барабар» деп жазышкан.

Декарт барабардыктын белгиси (=) деп жалпы белгини, анализдеп, киргизет. Европада бул белги жалпы кубаттоо менен кабыл алынат жана бардык жакка тарай баштайт.

Ар бир доордо ар кандай барабарсыздыктын белгилерин колдонушкан. Азыркы > жана < барабарсыздыктын белгилерин биринчи жолу 1631-жылы Харриот сунуш кылган. Бул авторлор тарабынан кубаттоо менен кабыл алынып, тез эле пайдалана баштаган. Типографияларда алгачкы учурларда V тамгасын, барабарсыздыктардын белгилерин жазууда пайдаланышкан.

2.4.3. АРИФМЕТИКАЛЫК АМАЛДАРДЫН ТАРЫХЫ

Ар кандай доорлордо жана ар түрдүү элдерде арифметикалык амалдардын саны түрдүүчө болгон. Орто кылымдагы китептерде арифметикалык тогуз амал бар: 1) номерлөө; 2) кошуу; 3) кемитүү; 4) экиге көбөйтүү; 5) көбөйтүү; 6) экиге бөлүү; 7) бөлүү; 8) прогрессия (натуралдык катардын суммасын табуу) 9) квадраттык тамырдан чыгаруу.

Номерлөө арифметикалык амал катары XIII жана XIV кылымдарда Римдик жана индустук эсептөө эрежелеринин ортосунда талаш-тартыш болуп турган убакта окуу китептерине кирген.

Прогрессия амалында негизинен натуралдык катарды суммалоо каралган. Айрым учурда жуп жана так катарлардын суммасын табуу, жөнөкөй геометриялык прогрессияларды суммасын табуу каралган.

Тамырдан чыгаруу негизинен квадраттык тамыр чыгаруу менен гана чектелген.

Сандарды «экиге көбөйтүүнү» Египеттиктер кеңири колдонушкан, алар ар кандай көбөйтүүнү экиге көбөйтүүгө алып келишкен.

Мисалы: $45 \cdot 17$

$$17 = 1 + 2^4$$

$$45 \cdot 17 = 45 \cdot (1 + 2^4) = 45x(1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$$

$$45 \cdot 1 = 45 \quad (*)$$

$$45 \cdot 2 = 90$$

$$45 \cdot 2 \cdot 2 = 180$$

$$45 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 360$$

$$45 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 720 \quad (*)$$

$$45 \cdot 17 = 45 \cdot (1 + 2^4) = 45 + 720 = 765.$$

IX кылымдагы өзбек математиги Мухаммед ал-Хорезми экиге көбөйтүүнү жана экиге бөлүүнү арифметикалык өзгөчө амалдар деп атаган. XII кылымда анын китеби латын тилине которулгандан кийин бардык Европадагы арифметикалык окуу китептерине арифметикалык амалдардын ичинен экиге көбөйтүүнү жана экиге бөлүүнү кошушту.

XV кылымдын аягында италиялык арифметика китебинин автору Лука Пачиола биринчи болуп экиге көбөйтүү жана бөлүү, булар көбөйтүү жана бөлүүнүн айрым учурлары деп, аларды арифметикалык амалдардын санынан алып таштаган. Бирок көпкө чейин практикалык эсептөөлөрдө экиге көбөйтүү жана бөлүү колдонулган.

Бүтүн сандар менен арифметикалык амалдарды жүргүзүүнүн азыркы кездеги колдонулуп жүргөн жолдору башка өлкөлөргө караганда ондук номерлөө Индияда эрте таркагандыгына байланыштуу, бара-бара Индияда биринчилерден болуп иштелип чыккан.

Болжол менен 660-жылдары грек окумуштуусу Север Себокт индустар жөнүндө мындай деп жазат: «Алардын эсеп жүргүзүү боюнча баалуу жолдорун жазып көрсөтүүгө да болбойт. Эсеп жүргүзүүлөр 9 цифралардын жардамы менен жүргүзүлө тургандыгын гана айтып кетемин. . .». Бул эсеп жүргүзүүнүн жолдорунун Европага өтүшүнүн издерин X кылымдын аягындагы сейрек учуроочу кол жазмалардан табууга болот.

Өзбек математиги Мухаммед ал — Хорезмдин «Индустук цифралар менен жүргүзүлүүчү арифметика» деген китеби XII кылымда латын тилине которулгандан кийин; XIII кылымда Европада индустардын эсептөө жолдору менен тааныша башташат.

Индиялык математиктер арифметикалык алты амалды караган: кошуу, кемитүү, көбөйтүү, бөлүү, даражага көтөрүү жана тамырдан чыгаруу.

Бүтүн сандар менен жүргүзүлүүчү амалдардын индустук эрежелери биздин эрежелерден бардык амалдар сол жактан, жогорку разряддардан башталa тургандыгы менен гана айырмалануучу.

Индустар үстүнө кум же порошок төгүлгөн тактайчаларга эсептөөлөрдү жүргүзүшкөн. Эгерде келерки разряддын үстүнө амал жүргүзүү керек болуп, бир бөлүгүн жогорку разрядка кошуу керек болсо, жазылган цифраны «өчүрүп салып», аны жаңы цифра менен алмаштырууга оңой болгон.

Кагазга түшүрүп жазууда индустардын эсептөө жолу ыңгайсыз болгон.

Жалпысынан алганда, арифметикалык амалдарды түрдүү доорлордо түрдүүчө аткарышкан. Бара-бара ыңгайлуу, өркүндөтүлгөн жолдору тандалып алынган.

Кошуу. Азыркы түрдөгү сандарды кошуу жогоруда каралып кеткендей Индияда пайда болгон. IX кылымда арабдарга алып келинген. Арабдардан кошуу жолу Европага жеткен. «Сумма» термини байыркы мезгилде эсептөөлөрдү жүргүзүүдөгү негизги сан үчүн колдонулган.

XV кылымдын аягынан баштап, сумма, кошуунун жыйынтыгы катарында колдонула баштаган. Ошондой эле «суммалоо» деген терминдер пайда боло баштаган.

«Жыйынтык» термини, латындын сөзүнөн «resultare — келип чыгат» деген этиштен пайда болгон. «Жыйынтык» математикалык термин катары биринчи жолу Петр Датский (1291) жылы колдонгон.

«Барабар болот» термини латындын «facit-жасайт, түзөт» деген сөзүнөн келип чыккан. Бул facit (фацит) азыркы учурга чейин, эсептөөнүн жыйынтыгын билгизет.

«Кошулуучу» (аддендум) терминин XIII кылымдагы авторлор колдонушкан.

Кемитүү. Гректер жана Римдиктер «кемитүү» деген терминдин ордуна ар кандай терминдерди колдонушкан. Биринчилерден болуп Боэция «кемитүү» (subtractio — субтракцио) терминин киргизет. Магницкий дагы «кемитүү» терминин колдонот. 1716-жылы Вольф «кемүүчү», «кемитүүчү» терминдерин колдонот.

Кемитүүнүн жыйынтыктарын белгилөө үчүн, Герберт (X кылым) «калдык», «ашыгы менен» деген терминдерди колдонот. Видман (1489-ж.) биринчи жолу кемитүүнүн жыйынтыгын жазууда «айырма» (differentia) терминдерин жазууну сунуш кылат.

Кемитүү амалдарын аткаруу негизинен эки жол менен жүргүзүлгөн.

Биринчи жолу Индиядан чыккан, мында кемитүү солдон оңго карата аткарылат.

Мисалы: 14825—5342

9	95	9548	95483
1) 14825	2) 14825	3) 14825	4) 14825
5342	5342	5342	5342

1) 14—5=9 жыйынтык, үстүнө жазылат, пайдаланылган 1, 4, 5 — цифралары сызылат.

2) 8—3=5 жыйынтык үстүнө жазылат, пайдаланылган, 8, 3 цифралары сызылат.

3) 2 ондуктан 4 ондукту кемитүүгө болбойт, үстүндө жазылган 5 жүздүктөн бир жүздүгүн алсак;

12—4=8 болот, жыйынтыкты үстүнө жазабыз, пайдаланылган 2, 4 цифраларын жана үстүндөгү пайдаланылган 5 цифрасын сызып, анын үстүнө 4 цифрасын жазабыз.

4) 5—2=3 жыйынтык үстүнө жазылат, пайдаланылган 5, 2 цифралары сызылат.

Сызылбаган цифралардан турган сан 9483 болот.

14825—5342=9483.

Арабдар, оң жактан сол жакты көздөй кемитүүнү сунуш кылышкан.

Көбөйтүү. Көбөйтүү амалы кошуу амалы менен бир катар, номерлөөнүн негиздери болуп саналат. Египеттиктер, көбөйтүүнү эки эселөө жолу менен көбөйткөн. Андан кийин жыйынтыктарын кошушкан.

Эки эселөө жолун орустар дагы пайдаланышкан.

Мисалы: 1) 45х16 көбөйтүү керек болсун.

45	16
90	8
180	4
360	2
720	1

45х16=720х1=720

2) Экиге бөлгөндө калдык калган учурду карайлы.

56х27

56	27 (*)
112	13 (*)
224	6
448	3 (*)
896	1 (*)

56x27=896+448+112+56=1512

Көбөйтүүнүн эрежеси: сандардын көбөйтүндүсү экинчи мамычадагы жуп эмес сандарга туура келген, биринчи мамычанын сандарынын суммасына барабар.

Байыркы мезгилде эле Индияда сандарды көбөйтүүнүн азыркыга окшош жолун пайдаланышкан. Жогоруда айтылгандай индустар көбөйтүүнү сол жактан оң жакты көздөй, жогорку разряддардан баштаган.

Мисалы: 57x43 берилсин:

$$\begin{array}{r}57\\ \underline{43}\\ 228\\ \underline{171}\\ 2451\end{array}$$

Арабдар индиялыктардан көбөйтүүнүн жолун үйрөнгөн. Алардан Европага өткөн. Европалыктар, ар кандай 6—8 варианттарды сунуш кылып окуу китептерин чыгарышат.

Көбөйтүүнүн жыйынтыгы «мультипликациянын суммасы» деп аталган. Кийинчирээк «көбөйтүлгөн сан» (numerus productus), андан «көбөйтүндү» термини келип чыккан.

Немец автору Петценштейнер (XV кылым) төмөндөгү түрдө көбөйтүүнү сунуш кылат.

Мисалы: 523x48 берилсин.

$$\begin{array}{r|l}523 & \\ \hline 4184 & 8\\ \underline{2092} & 4\\ 25104 & \end{array}$$

Көбөйтүүнү ар кандай жолдор менен эсептешкен. Азыркы көбөйтүүнүн жолун Адам Ризенин (XVI кылым) окуу китептеринен көрсө болот. Бул автордун окуу китептери бардык жактарга кеңири таркаган.

Бөлүү. Арифметика боюнча алгачкы окуу китептеринде (Максим Плаунд, 1340-жылдар) «Бөлүү бул, бөлүнүүчүдө бөлүүчүдөн канча бирдик бар экендигин табуу» деп берилет. Демек, бөлүү изделүүчү сан катарында берилет.

Ар кандай мезгилде бөлүүнү ар кандай жолдор менен аткарышкан.

Индиялык жол менен бөлүү тез өчүрүлүп, эсептегенге оңой болгон. Арабдар, сандарды чийүү жана үстүнө жазуу жолдорун колдонушкан. Бул эсептөөгө көп кыйынчылыкты түзгөн. Бөлүүнүн бул жолун пайдалануу Европада XVIII кылымга чейин кармалган.

Мисалы: 23576:56 берилсин.

1) Бөлүүчү, бөлүнүүчүнүн астына жазылат. 23 саны 56 га бөлүнбөйт, ошондуктан бөлүүнүн биринчи цифрасын бөлүнүүчүнүн экинчи цифрасынын астына жазабыз.

23576 { 4
56

Оюбузда тийиндинин биринчи цифрасын табабыз, аны бөлүнүүчүнүн оң жагына кашаанын ичине жазабыз.

Бөлүүчүнүн чоң разрядын 4 кө көбөйтүп, бөлүнүүчүнүн туура келген разряддагы санынан кемитебиз. 5х4=20, 23—20=3, 2, 3 цифраларын чийип таштайбыз, жыйынтык 3 цифрасынын чийилген цифраларынын кичинекей разряддынын тушуна бөлүнүүчүнүн үстүнө жазылат.

3
23576 { 4
56

Андан кийин 6х4=24, 35—24=11 төмөндөгү түрдө жазабыз:

1
31
23576 { 4
56

Мында бөлүнүүчүдөн пайдаланылган, 5 цифрасы чийилет.

Бөлүүнүн 1-бөлүгү аяктады.

2) 2-бөлүгүндө чийилбеген 1176 санын 56 га жогорудагыдай жол менен бөлөбүз.

1176 { 2
56

5х2=10, 11—10 =1

1
1176 { 2
56

6х2=12, 17—12=5

5
1
1176 { 2
56

Бөлүүнүн 2-бөлүгү аяктады.

3)Чийилбеген 56 санын 56 га бөлөбүз

56 { 1
56

Демек тийиндинин бирдиги —1, ондугу —2, жүздүгү — 4.

23576 : 56= 421.

Жогоруда көргөндөй чийүү аркылуу бөлүү көп убакытты талап кылган.

Ошондуктан Италия элинин, «Бөлүү — бул кыйын нерсе» деген макалы калып калган. Байыркы убакта бөлүүнү жакшы өздөштүргөн адамга «абактын доктору» деген наам берилген. Бөлүүнү аткаруунун ар кандай жолдору ондоп саналган.

Арифметикалык амалдардын касиеттери. Орун алмаштыруу закону байыркы мезгилден бери эле кошуунун жана көбөйтүүнүн закону катары эч талаш-тартышсыз эсептелинип келе жатат. Евклид «Башталмасынын» VII китебинде көбөйтүүнүн орун алмаштыруу законун $a \cdot b = b \cdot a$ далилдейт.

Коммутативдик закон терминин 1814-жылы Сервуа киргизген.

Кошуунун жана көбөйтүүнүн топтоштуруу закону дайыма колдонулуп келген. Грассман «Арифметика окуу китеби жөнүндө» (1861-ж.) китебинде кошуунун топтоштуруу законунун $(a+b)+c = a+(b+c)$ далилдөөсүн киргизет.

Ассоциативдик закон термини Гамильтон тарабынан 1853-жылы киргизилген. Көбөйтүүнүн бөлүштүрүү же дистрибутивдик закону Евклид тарабынан геометриялык жол менен далилденет. Андан кийин $(a + b) \cdot a = a^2 + ab$ экендигин далилдейт.

2.5. БӨЛЧӨК САНДАР

2.5.1. БӨЛЧӨК САНДАРДЫН ПАЙДА БОЛУШУ

Бөлчөк сандары адамзаттын өнүгүү тарыхынын алгачкы мезгилинде пайда болгон. Байыркы заманда бир нече адамдар аңчылыктан түшкөн олжолорду өз ара бөлүштүрүү учурунда бөлчөк сандарын билүүгө мажбур болушкан. Адамдардын биринчи кездештирген бөлчөгү бул бүтүн нерсенин жарымы.

Бөлчөк сандар сандардын бирдик үлүштөрү катары байыркы Египеттик папирустарда, Вавилондуктардын чополордо жазылган жазууларында сакталып калган.

Кыргыз элинде кылымдардан бери «бир үлүш», «ашмүшкө», «чейрек», «жарым» деген түшүнүктөр белгилүү болгон жана жашоо-турмуштарында бул түшүнүктөрдү пайдаланып келишкен.

Бөлчөк түшүнүгү, бүтүн сандар сыяктуу эле кылымдар бою өсүп, өнүккөн. Гректер, Евклид (биздин эрага чейин III кылым) өзүнүн «Башталмасында», Никомах (I кылым) бөлчөктөрдү мүмкүн болушунча пайдаланбоого аракеттенишкен. Архимед (биздин эрага чейин 287—212-жылдар) бөлчөктөрдү пайдаланса дагы, аларды сан катарында эсептеген эмес. Бөлчөктөрдү көп кылымдар бою, «сынык сан» деп аташкан. Бул терминди арабдар биринчи айтып баштаган. Л. Пизанскийдин (Фибоначчи) арифметика китебинен кийин Европага тараган. «Сынык сан» термини кээ бир өлкөлөрдө XIX кылымдарга чейин колдонулуп келген.

Валлис (XVII кылым) бөлчөк сан эмес, себеби ал «канча?» деген суроого эмес, «кандай санда?» деген суроого жооп берет деген.

XVIII кылымдын экинчи жарымында И. Ньютон тарабынан сандардын жалпы аныктамасына туура келүүчү бөлчөктөр түшүнүгү киргизилген. Ал, сандын өзүнө барабар санга болгон катышын жана ал катыштын 1 деп кабыл алына тургандыгын аныктаган.

Бул аныктама бөлчөк түшүнүгүнө туура келген.

Эйлер, Петербург Академиясынын мүчөсү (1787-жылы) өзүнүн арифметика боюнча китебинде айткан: « $\frac{7}{3}$ түшүнүгү, $\frac{1}{2}$ түшүнүгү сыяктуу эле, бүтүн сан болбосо дагы аны өзгөчө сандардын тегине кошуп, бөлчөктөр же сынык сандар дейбиз».

Бөлчөк сандардын өнүгүшүнүн тарыхында бөлчөктөр үч түрдө бөлүнөт:

1) үлүштөр же бирдик бөлчөктөр, алардын алымы бир, бөлүмү ар кандай сан болушу мүмкүн;

2) системалуу бөлчөктөр, алардын алымы ар кан-

дай сан болушу мүмкүн, бөлүмү кандайдыр бир сандын даражасы болушу мүмкүн, мисалы, ондун же алтымыштын даражасындагы сандар;

3) жалпы түрдөгү бөлчөктөр, алардын алымы да, бөлүмү да ар кандай сандар болушу мүмкүн.

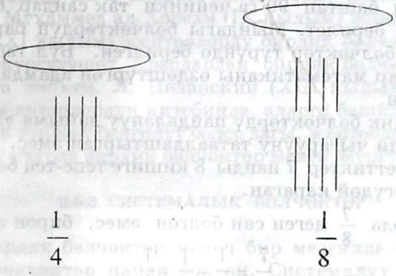
Орто кылымдарда эгерде бөлчөктүн алымы бөлүмүнөн чоң болсо анда «жалган» бөлчөктөр, ал эми алымы бөлүмүнөн кичине болсо «чын» бөлчөктөр деп аташкан. Бул чын жана жалган деп бөлчөктөрдү атоолор XVIII кылымда жоюлган.

VIII кылымда бөлчөктөрдүн азыркы түрдө айтылышы Индияда берилген. Бөлчөк, бул эки түгөй натуралдык сан, бири (бөлүмү) элементтин канча бөлүккө бөлүнгөндүгүн көрсөтөт, ал эми экинчиси (алымы) ушундай үлүштөрдөн канчасы алынгандыгын көрсөтөт. Бул аныктама Индиядан Орто Азияга андан Европага өткөн.

2.5.2. БИРДИК БӨЛЧӨКТӨР

Адам коомунун өнүгүш тарыхында адамдар бирдик бөлчөктөр түшүнүгүнө келишкен. Үлүштөр «жарым», «чейрек», «ашмүшкө» түшүнүктөрүн адамдар бөлчөк деген эмне экендигин билбей эле колдонушкан.

Байыркы Египетиктер биздин доорго чейин 2000-жылдан биздин доорго чейин VIII кылымга чейин маданияттарынын гүлдөп өнүккөндүгүнө, өздөрүнөн кийин искусствонун мыкты эстеликтерин калтыргандыгына карабастан, бөлчөк сандардын арифметикасында бирдик бөлчөктөрдү жана $\frac{2}{3}$ бөлчөгүн ойлоп чыгаруудан ары бара алган эмес. Ахместин папирусунан баштап табылган бардык кол жазмаларда жалаң кана бирдик бөлчөктөр берилет. Иероглифтик жазуулар менен $\frac{1}{n}$ түрүндөгү бөлчөк ачылган ооз түрүндө берилген. Бөлүмүнө туура келген сандар ооздун ылдый жагына тиешелүү түрдө жазылган.



20-сүрөт. Бөлчөктөрдүн Египеттик жазылышы.

Иератикалык жазууларда ооз, чекит менен алмаштырылган. Тиешелүү бөлүмдүн астына чекит коюлган.

Эгерде кандайдыр бир жыйынтыкты бөлчөк сан менен жазууга туура келсе, ал бирдик бөлчөк болбосо анда. аны бирдик бөлчөктөрдүн суммасы түрүндө жазышкан.

Мисалы: $\frac{3}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$, $\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

Суммалары түрүндө, бирок кошуу белгиси жок жазышкан б. а. $\frac{1}{3}\frac{1}{15}$, $\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}$.

Бөлчөктөрдүн катар жазылышын кошуу катарында түшүнүшүп, андан кийин жашаган көп элдер да кошуу белгисин колдонушпай калган. Жазуунун мындай Египеттик жолу бизде жарым-жартылай сакталып калган. Биз аралаш сандарды кошуу белгиси жок, бүтүн бөлүгүн жана бөлчөк бөлүгүн катар жазабыз. Мисалы: $2+\frac{1}{4}$ дин ордуна $2\frac{1}{4}$ деп жазабыз.

Ахместин папирусунда $\frac{2}{n}$ алымы 2 болгон бөлүмү 5 тен баштап 99 га чейинки так сандар болгон таблица берилет. Мындагы бөлчөктөрдүн бардыгы бирдик бөлчөктөр түрүндө берилген. Бул таблицаны ар бир математиканы өздөштүргөн адамдар пайдаланган.

Бирдик бөлчөктөрдү пайдалануу дайыма эле маселелерди чыгарууну татаалдаштырган эмес.

Египеттиктер 7 нанды 8 кишиге тепе-тең бөлүүнү төмөндөгүдөй караган.

Аларда $\frac{7}{8}$ деген сан болгон эмес, бирок алар

$$\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

экендигин билишкен. Бул аларга жети нанды сегиз кишинин ортосунда бөлүү үчүн 8 жарым нандын, 8 чейрек нандын жана 8 ашмүшкө нандын керек экендигин көрсөтөт. Көрүп тургандай бул маселеде чыгаруунун Египеттик жолу бир канча ыңгайлуу болуп саналат.

$\frac{2}{3}$ бөлчөгү Египеттиктер үчүн өзгөчө орунду ээлеген. Мүмкүн болушунча пайдаланууга аракеттенишкен. Ахместин папирусунда 7 нанды 10 кишиге тепе-тең бөлүү каралат.

$$\frac{7}{10}=\frac{2}{3}+\frac{1}{30}$$

Египеттик окуучу бөлчөк сандар аркылуу эсептелинүүчү маселелерди чыгарганда, бөлчөк сан кандай бөлүктөрдүн суммасынан тура тургандыгын билүү үчүн таблицаны кароо керек болгон. Бул таблицалар Ахместин папирусунда берилген.

Бирдик бөлчөктөрдүн жардамы менен Египеттиктерди эсептөө ыкмасы гректерге Пифагордун убагында (биздин доорго чейин VI кылым) өткөн. Бул биздин доорго чейин III кылымдын аягына чейин колдонулуп келген.

Арабдар дагы бирдик бөлчөктөрдү кабыл алышкан. Мухаммед ал-Хорезм (IX кылым) жана ал-Кархи (XI кылым) эсептөөлөрдү бирдик бөлчөктөр менен жүргүзүшөт. Арабдардан бирдик бөлчөктөр Европага жеткен. Л. Пизанский (XIII кылым) жана башка авторлордун китебинде, аларга башка бөлчөктөрдүн түрлөрү белгилүү болсо дагы, эсептөөлөрдү көпчүлүк учурда бирдик бөлчөктөр менен жүргүзүшкөн.

2.5.3. СИСТЕМАЛЫК БӨЛЧӨКТӨР

Бирдик бөлчөктөр менен бир мезгилде системалуу бөлчөктөр пайда болгон. Системалуу бөлчөктөрдүн айтылышы биздин сөздөрүбүздө калып калган: сааттын 60 тан бир бөлүгү, минута; минутанын 60 тан бир бөлүгү секунда; секунданын 60 тан бир бөлүгү терция. Вавилондо биздин доорго чейин 3000 жыл мурда ченөөнүн бирдиги $\frac{1}{60}$ болгон. Эгерде чоңдукту бир бүтүн десек, анда бирдик үлүштөрү:

$$\frac{1}{60}, \frac{1}{60^2}, \frac{1}{60^3} \dots$$

Минута, секунда, терция түшүнүктөрү латын тилинен алынган. Римдиктер мындайча аташкан:

minuta prima — биринчи үлүш — $\frac{1}{60}$,

minuta sekunda — экинчи үлүш — $\frac{1}{60^2}$,

minuta tertia — үчүнчү үлүш — $\frac{1}{60^3}$ ж.б.у.с.

Мында кандайдыр бир чоңдуктун үлүштөрүнөн бөлчөктөр түшүнүгүнө өтүшкөн. Бул системалуу бөлчөктөр алтымыштык бөлчөктөр деп аташкан. Ал бөлчөктөрдүн бөлүмү болуп, 60, 60^2, 60^3, 60^4,... саналган.

Алтымыштык бөлчөктөрдү XVII кылымга чейин колдонуп келишкен, өзгөчө илимий иштерде колдонушкан. Аларды физикалык же астрономиялык бөлчөктөр деп аташкан. Ал эми жалпы түрдөгү бөлчөктөрдү алардан айырмалап, жөнөкөй жана элдик бөлчөктөр деп аташкан.

XV кылымда өзбек математиги ал-Каши айлананын узундугунун радиуска болгон катышын алтымыштык системада төмөнкүдөй алат:

$$6 + \frac{16}{60} + \frac{59}{60^2} + \frac{28}{60^3} + \frac{1}{60^4} + \frac{1}{60^5} + \frac{1}{60^6} + \frac{1}{60^7} + \frac{1}{60^8} + \frac{1}{60^9}$$

Алтымыштык эсептөө системасынан ондук эсептөө системасына көчүрүп жазганда
6,2831853071795865 ондук бөлчөгү болот.

Бул санды экиге бөлүп, айлананын узундугунун диаметрине болгон катышынын жакындатылган маанисин алабыз:

$$\pi \approx 3,1415926535897932$$

Бул бөлчөктө үтүрдөн кийинки бардык 16 белги туура чыгарылган.

Алтымыштык бөлчөктөр XVII кылымда ондук бөлчөктөргө орун бошотуп берди. Ондук бөлчөктөр биринчи жолу ал-Каши тарабынан киргизилген.

Ал-Каши ондук бөлүктөрдү, ондук минуталар, ондук секундалар, ондук терциялар ж. б. у. с. улантkан. 1427-жылы жазылган «Эсептөө искусствосунун ачкычы» деген эмгегинде ал-Каши ондук бөлчөктөр жөнүндө түшүнүк берет жана алар менен амалдарды жүргүзүүнү үйрөтөт.

XIV кылымдын орто ченинде Тараскондук (түштүк Франция) Э. Бонфильс ондук бөлчөктөр жөнүндө өзүнүн кол жазмасын калтырып кеткен. Ал 600-жыл архивде сакталгандан кийин гана окулган. Э. Бонфильстин ондук бөлчөктөрдү терең түшүнгөндүгүн көрүүгө болот.

Бельгиялык инженер С. Стевин 1585-жылы китепче басып чыгарган жана ондук бөлчөктөрдү колдонуунун өтө ыңгайлуулугун жана бул бөлчөктөрдүн жардамы менен «сындырылган сандарсыз» турмуштук ар кандай маселелерди чечүүгө боло тургандыгын айтат.

С. Стевинди Европада ондук бөлчөктөрдү ойлоп тапкан деп айтышат, себеби ал-Кашинин ондук бөлчөктөрдү ойлоп тапканы, Европага жеткен эмес деп эсептешет. Ошондой эле Стевин Европадагы ондук бөлчөктөр боюнча идеяларды бир системага келтирет. Акчага, чендерге, салмакка жана бурчтарды бөлүүдө ондук системаны пайдаланууну сунуш кылат.

0,6543 ондук бөлчөгүн төмөндөгүдөй жазат.

6 О 5 О 4 О 3 О

Ошондой эле сынык сандарсыз кандайча бөлчөктөр менен арифметикалык амалдарды жүргүзүүгө мүмкүн экендигин көрсөтөт.

Ондук бөлчөктүн, бүтүн бөлүгүнөн бөлчөк бөлүгүн чекит аркылуу бөлүүнү 1617-жылы Непер сунуш кылган. Бирок ага чейин 1593-жылы Клавий бөлчөктүн бүтүн бөлүгү менен бөлчөк бөлүгүн бөлүп жазган.

Мезгилдүү ондук бөлчөктөр жөнүндө илимий эмгектер XVII кылымда пайда боло баштайт. Ал эми окуу китептеринде XIX кылымдан баштап чыга баштайт.

«Таза» жана «аралаш» мезгилдүү ондук бөлчөктөрдү жөнөкөй бөлчөктөргө айландыруунун эрежесин биринчи жолу Август 1822-жылы сунуш кылган. «Таза» жана «аралаш» мезгилдүү ондук бөлчөктөр термини биринчи жолу 1836-жылы Коппенин жетекчилиги астында киргизилген.

2.5. 4. ЖАЛПЫ ТҮРДӨГҮ БӨЛЧӨКТӨР

Гректер биздин доорго чейин $\frac{p}{q}$ (p жана q бүтүн сандар) жалпы түрдөгү бөлчөктөрдүн теориясынын башталышына негиз салышкан. Бирок алар бөлчөктөрдү сан деп айтышкан эмес да, «катыш» дешкен.

Мындай бөлчөктөрдүн эң жөнөкөйлөрү $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ бара-бара турмуш практикасына колдонууга кирет.

Архимед (биздин доорго чейин 287—212-жылдар) айлананын узундугунун аныктамасын берет жана анын узундугунун диаметрге болгон катышы, төмөндөгү барабарсыздыкты канааттандырарын жазат:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Эратосфен (биздин доорго чейин 276—194) меридиандын узундугу 83 тү түзөт, ал эми тропикти түзгөн меридиандын бөлүгү ушундай 11 бөлүктөн турат, деп айткан. Мында Эратосфен меридиандын бөлүгү, меридиандын $\frac{11}{83}$ бөлүгүн түзө тургандыгын көрсөткөн.

Байыркы Римдиктерде акча жана салмактын бирдиги унция болгон. Ал фунттун (асса) он экиден бир бөлүгүн түзгөн. Мындан негизги бөлчөк $\frac{1}{12}$ унция болгон.

$\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$,... бөлчөктөрүн, «8, 9, . . .» унция деп аташкан.

12 унция бир 1 асс (фунт); $\frac{11}{12}$ — «унциясыз асс»; $\frac{10}{12}$ — «$\frac{1}{6}$ жок асс» ж. б. у. с. деп аталган.

«Бөлчөктөр» менен амалдарды жүргүзүүнү карашкан.

Биздин доорго чейинки I кылымдын атактуу акын жазуучусу Горациянын чыгармасынан. Ошол доордогу мектептин мугалими менен окуучунун сөзүнөн үзүндү.

«**Мугалим.** 5 унциядан 1унцияны алсак канча болорун, Альбиндин баласы айтсын?

Окуучу. Үчтөн бир.

Мугалим. Туура, сен өзүңдүн мүлкүңдү сактай аласың».

Индиялыктардын биздин доорго чейинки IV кылымдагы кол жазмаларында $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{8}$ бөлчөктөрү кездешет.

Индиялыктар бөлчөктөрдү эки сан түрүндө жазышат: алымынын астына бөлүмүн, бирок ортосуна сызык сызышкан эмес. Аралаш бөлчөктү жазыш үчүн, алгач бүтүн санды, анын астына алымын, алымынын астына бөлүмүн жазышкан. Арабдар индустардын аралаш бөлчөктөрдү жазуу тартибин кабыл алышкан, кээ бир авторлор бүтүн санды бөлчөк сандын катарына жазышкан.

Герон аралаш бөлчөктөрдү төмөндөгү түрдө жазат.

Мисалы, $3\frac{5}{12}$ (3 бирдик, 12′12′ үлүш (он экиден) беш).

Көптүк түрүндө окулуш үчүн, бөлүм эки жолу жазылган.

ал-Хассара болжол менен XII кылымда бөлчөк сызыгын сызууну сунуш кылат.

Европада XV кылымда бүтүн санды бөлчөк сандын астына жазып башташат.

XVI кылымда бөлчөктөрдү жазуу азыркы түргө келет.

Бөлчөктөр Европанын мектептеринин китептерине XVIII кылымда араң кирген.

1747-жылы Петербург Академиясынын ардактуу профессору венгр Сегнер «дурус» жана «буруш» бөлчөктөр терминин киргизет.

Бөлчөктөрдү кеңейтүү, (бөлчөктөрдүн алымын жана бөлүмүн бир эле санга көбөйтүү) жана бөлчөктү кыскартуу , XII кылымдан баштап кезиге баштайт. Бөлчөктөрдү кыскартуу XV кылымдан баштап, бөлчөктөрдү кеңейтүү XIX кылымдан баштап колдонула баштайт.

Индустар биздин жыл эсебибиздин биринчи кылымдарында эле кадимки бөлчөктөрдүн үстүнөн аткарылуучу амалдардын азыркы кездеги эрежелерин табышкан. Бул эрежелер арабдарга, алардан Европага өткөн.

Индиялык математиктер (Брамагупта — VII кылым, Махавира — IX кылым) бөлчөктөрдү азыркы жолдор менен көбөйтөт.

Иордан Неморарий көбөйтүүнүн индиялык жолун берет. Алгачкы арифметика китебинде бөлчөктөрдү көбөйтүү амалы, кошуу жана кемитүү амалдарынан кийин берилген.

Герон (I кылым) аралаш бөлчөктөрдү төмөндөгүдөй көбөйткөн.

$$3\frac{63}{64}\cdot 7\frac{2}{64}$$

$$3\cdot 7 = 21$$

$$3\cdot\frac{2}{64}=\frac{6}{64}$$

$$\frac{63}{64}\cdot 7=\frac{441}{64}$$

$$\frac{63}{64}\cdot\frac{2}{64}=\frac{126}{64}:64=\frac{1}{64}+\frac{62}{4096}$$

Бардыгы:

$$21+\frac{6}{64}+\frac{441}{64}+\frac{1}{64}+\frac{62}{4096}=21\frac{448}{64}+\frac{62}{4096}=$$

$$=21+7+\frac{62}{4096}=28\frac{62}{4096}.$$

XIII кылымдагы авторлор бөлчөктү бөлчөккө бөлүүнү төмөндөгүдөй жол менен аткарышкан: биринчи бөлчөктүн алымын (бөлүмүн), экинчи бөлчөктүн алымына (бөлүмүнө) бөлүшөт.

Мисалы: $\frac{8}{15}:\frac{2}{3}=\frac{8:2}{15:3}=\frac{4}{5}$

XVI кылымга чейин арифметика окуу китебинде, бөлчөктөрдү бөлүү үчүн орток бөлүмгө келтиришкен. Андан кийин алымдарын алымдарына бөлүшкөн.

2.5.5. ҮЗГҮЛТҮКСҮЗ (ЧЫНЖЫР) БӨЛЧӨКТӨР

Евклиддин «Башталмасынын» VII китебинде ар кандай эки натуралдык сандын эң чоң жалпы бөлүүчүсүн, удаалаш бөлүү жолу менен табуунун алгоритмин карайт. Бул жол менен табууну «Евклиддин алгоритми» (алгорифми) дешет. Бул таза арифметикалык жол менен караганда үзгүлтүксүз (чынжыр) бөлчөктөргө алып келет.

Бул бөлчөктөр биринчи жолу Бхаскаранын эмгектеринде кездешет.

Валлис биринчи жолу бул бөлчөктөрдү «үзгүлтүксүз бөлчөктөр» деп атаган. Азыркы учурда ушул термин сакталып калган.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 \ldots}}}}$$

Туура келүүчү бөлчөктөр:

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{19}, \frac{99}{70}, \ldots$$

Бул маанилер II кылымда Теон Смирнскийге белгилүү болгон.

Биздин доорго чейин Платон (429—348), $2 \approx \frac{7}{5}$ экендигин тапкан. Герон (I кылым) $2 \approx \frac{17}{12}$ ни тапкан.

Ошондой эле Герон байыркы Вавилондуктарга белгилүү болгон

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$$

жакындаштырылган барабардыгын дагы тактап изилдеген.

Архимед төмөндөгү үзгүлтүксүз бөлчөккө туура келген 12-бөлчөк $\frac{1351}{780}$ ди тапкан:

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 +}}}}$$

Чынжыр бөлчөктөр термини XVIII кылымда пайда болгон.

Мектептерде үзгүлтүксүз (чынжыр) бөлчөктөрдү берүүнүн мазмунун биринчи жолу Грунерт (1832-ж.) түзгөн.

2.5.6. ПРОЦЕНТ ЖАНА ПРОМИЛЬ

$\frac{1}{100}$ жана $\frac{1}{1000}$ ондук бөлчөктөрүн, процент жана промиль деп аташат.

Проценттик амалдар Вавилондо көп каралган.

Процент латын сөзүнөн алынган pro centum — «жүздөн, жүзгө». Проценттерди практикада пайдалануу ыңгайлуу болгон. Алар бүтүн сандардын жүздүк үлүшүн караган. Бул эсептөөлөрдү жеңилдетүү менен бүтүн бөлүгүн жана үлүшүн салыштырууга мүмкүнчүлүк түзгөн. Вавилондук кол жазмаларда берилген проценттик эсептөөлөр «жүздөн» эмес «алтымыштан» үлүштөр каралган.

Римдиктер процентти «жүздөн» бир үлүштү карашкан. Негизинен алар ар бир 100 сомго түшкөн пайда жана чыгашаны эсептешкен.

% белгиси XV италиялык кол жазмаларда пайда болгон. Италиялыктар cento (жүз), проценттик эсептөөлөрдө кыскача cto деп жазышкан. Бара-бара жеңилдетип t деп жаза башташкан, ушул жазуудан % белгиси келип чыккан болуш керек.

XIII—XVI кылымдарда процентке көп көңүл бурулган. Окуу китептеринде проценттик эсептөөлөрдүн ар кандай учурлары каралган. Арабдардын арифметикасы Европалык авторлор үчүн негизги үлгү болгон. Соода жүргүзүшкөн адамдардын бардыгы арифметика окуу китептерин алып процентерди эсептөөнү өздөштүрүүгө араккеттенишкен. Бул аларга соода жүргүзүүнү жеңилдетүүгө жардам берген.

Биринчи жолу проценттик таблицаны С.Стевин (1584-жылы) чыгарган.

Промиль —миңдик үлүш биринчи жолу Карданонун (1539) эмгектеринен кездешет. 1727-жылдан баштап колдонула баштаган.

Промиль латын сөзүнөн алынган pro mille — «миңден». Миңден бир үлүш абдан кичине болгондуктан, практикада көп пайдаланылбайт.

2.6. Л.Ф.МАГНИЦКИЙ ЖАНА АНЫН «АРИФМЕТИКАСЫ»

Леонтий Филиппович Магницкий 9 (19) июнь 1669-жылы төрөлүп, 19 (30) октябрь 1739-жылы каза болгон.

Магницкийдин мүрзөсүнүн үстүндө уулу Иван Магницкийдин жаздырган жазуусунда төмөндөгүлөр жазылган:

«. . . Ал илимдерге укмуштуудай кызыккан жана ишенүүгө кыйын болгон жолдор менен үйрөндү. Петр I математикалык илимдер жөнүндө аны менен нечен ирет аңгемелешкен жана анын терең билимдерине ушунчалык ыраазы болуп таңдангандыгынан аны магнит деп атаган жана Магницкий деп жазылууга буйрук берген».

1703-жылы Россияда математикалык агартуунун тарыхындагы маанилүү учур болуп саналат. Л. Ф. Магницкийдин «Арифметика, негизинен эсеп жүргүзүүчү илим, түрдүү диалекттерден славян тилине которулган жана жыйнакталып эки китепке бөлүнгөн. Бул китеп Леонтий Магницкийдин эмгектери аркылуу түзүлдү» деген узун наамы бар китеби чыккан. Математика боюнча биринчи басма окуу китеби болгон.

Магницкий латын, грек жана италия тилдерин билген, ал өзүнүн китеби үчүн материалдарды ар кайсы тилдеги китептерден чогулткандыгын ыр саптары менен жазат.

Бул китепте ошол кездеги математикалык билимдердин: арифметиканын, алгебранын, геометриянын жана тригонометриянын башталыштары болгон. Китептин аягында көп сандаган таблицалар жана деңиз ишине арналган бөлүмү болгон.

Китеп жарык көргөндө Петр I падышалык кылып, Россияда өнөр жайлар жана соода тез өнүгүп турган учур болуп, билимдүү адамдар алда канча көп санда керек болду. Окуучуларга биринчи иретте Магницкийдин китеби окууга берилген. Жарым кылым бою окуу китеби катары колдонулуп жүрдү. Китеп орустун түшүнүктүү тилинде жазылган. Өзү өлгөнчө навигация мектебинин мугалими болуп иштеген.

Китеп негизинен арифметикага арналган жана арифметика боюнча көп сандаган маселелер каралган. Китепти башында мурдагы кылымдагы математиканын жетишкендигине таянгандыгын жазат. Кээ бир саптарды, маселелерди ыр менен берген. Китептин аягына чейин илимди үйрөнүү керек экендигин даңазалайт. Биринчи титулдук бетте Пифагордун жана Архимеддин сүрөтү тартылган. Алар жөнүндө ыр саптарын берген. Анда, Пифагор менен Архимеддин улуу философ экендигин, далай илимдерди ачкандыгын, эсеп жагын эң биринчилерден изилдегендиктерин жана өзүнүн китебинде экөөнүн илимине таянгандыгын жазат.

Ал өзүнүн «Арифметикасын» эки бөлүккө бөлөт:

биринчисин — «арифметика — саясат», экинчисин — «арифметика — логистика» деп атайт.

Биринчиси практикалык маселелерди — «сатууда жана сатып алууда ар кандай эсептөөлөрдү жүргүзүүнүн гана үйрөнүүнү каалагандарга арналган. Бул бөлүгү далилдөөсүз, баяндоо жана көрсөтүү — мисалдарды чыгаруу менен жазылган.

Экинчи бөлүгү — «арифметика — логистика» — «биздин акылыбыз жеткен» абстрактуу маселелерди чечет. Магницкий мындай маселелердин «арифметика — саясат» менен чечилбей тургандыгын, аларды кандайдыр бир эрежелерге негиздебесе болбойт, болбосо кийинки бардык түзүүлөр негизсиз жана пайдасыз болуп кала тургандыгын айтат.

Магницкий «Арифметикасында» индустук цифраларды пайдаланган. Ошондон баштап, Россияда индустук цифраларды пайдалана башташкан. Номерлөө деген эмне? деген суроого төмөндөгүдөй жооп жазат.

Номерлөө бул 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 белгилери менен сүрөттөлүүчү сандардын аталышы.

Мында 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 маани берүүчү цифралар. 0 эгерде өзү жалгыз турса, мааниге ээ болбойт. Эгерде ал кандайдыр бир маани берүүчү цифрадан кийин жазылса, анда аны 10 эсе көбөйтөт.

Магницкий чоң сандар үчүн терминдерди берет. Миллион, биллион, триллион, квадраллион. 10^{24} — квадраллионго жеткенде, автор мындай дейт: «Акыл жеткис сандар бар,

Биз ойлонуп чечпеген.»

Жогорудагы саптар менен, натуралдык сандардын катарынын чексиз экендигин айтат.

Ошол убакта жасалма эрежелер менен маселелерди чыгаруунун жолдору окутулчу. Терс сандар киргизиле элек кезинде жөнөкөй маселелерди «жасалма жолдор» менен чыгарууга туура келген.

Магницкийдин китебинде «жасалма эреженин» жолу менен маселе чыгарууну төмөндөгү мисалдан көрөбүз.

«Бирөө мугалимден мындай деп сурайт: «Классында канча окуучу бар, уулумду сенин классыңа бергим келет». Мугалим мындай деп жооп берет: «Эгерде, класска дагы азыр окуп жаткандай санда жана анын жарымындай, жана чейрегиндей окуучулар жана сенин уулуң келсе, ошондо менде 100 окуучу болот». Мугалимдин канча окуучусу болгон?»

Биринчи болжолдоо: окуучулардын саны 28 болгон.

Анда маселенин мазмуну боюнча бул санга, ошондой, анын жарымындай, анын чейрегиндей сандарды жана бирди кошуу керек.

$$28 + 28 + 14 + 7 + 1 = 78$$

Мында 100 гө жетпей калды б.а. $100 - 78 = 22$ ге аз. 22 санын — «биринчи четтөө» болот.

Экинчи болжолдоо: Окуучулардын саны 32 болгон. Анда: $32 + 32 + 16 + 8 + 1 = 89$

Мында $100 - 89 = 11$ ге жетпей калды. Бул «экинчи четтөө» болот.

Эгерде эки болжолдоодо тең сан аз болуп чыккан учурда төмөнкүдөй эреже берилет: биринчи болжолдоо экинчи четтөөгө, ал эми экинчи болжолдоо биринчи четтөөгө көбөйтүлөт, чоң көбөйтүндүдөн кичинеси кемитилет жана айырмасы четтөөлөрдүн айырмасына бөлүнөт.

$$\frac{32 \cdot 22 - 28 \cdot 11}{22 - 11} = 36$$

Текшерүү: $36 + 36 + 18 + 9 + 1 = 100.$

Эгерде эки болжолдоодо тең маселенин шартындагыдан чоң сан чыгып калса, жогорудагы эле эреже колдонулат.

Эгерде биринчи болжолдоодо маселенин шартындагыдан чоң, ал эми экинчи болжолдоодо —

кичине сан ала турган болсок, анда жогоруда көрсөтүлгөн эсептөөлөрдө айырманы эмес, сумманы алуу керек.

Л. Ф. Магницкий көбөйтүү жөнүндөгү главасында немецтер көбөйтүү амалын төмөндөгүдөй аткарышат деп көрсөтөт:

$$\begin{array}{r} 481 \\ 399 \\ \hline 1443 \\ 4329 \\ 4329 \\ \hline 191919 \end{array}$$

«Арифметикада« жөнөкөй бөлчөктөр кеңири жазылган, ондук бөлчөктөр болсо, өлчөмдөрдүн ал кездеги системасында практикалык зор мааниге ээ болбогон эсеп жүргүзүүнүн кандайдыр бир жаңы түрү катары атайын главада жазылган.

Маселе. Кандайдыр бир адам аялына, кызына жана үч уулуна 48 000 сом мураска калтырат. Аялына бардык сумманын $\frac{1}{8}$ бөлүгүн, балдарынын ар бирине кызына караганда эки эсе көп берилсин десе, мураскорлордун ар бирине канча сомдон тийген?

Бул маселе төмөндөгүдөй чыгарылган:

«Тикте: 48 000

6 000 аялына

8

48000	биринчиге	2		2	12 000
6000	экинчиге	2	7—42 000	2	12 000 бал-на
42000	үчүнүгө	2		2	12 000
	кызына	1		1	6 000 кызына

Жообу: 6 000, 6 000, 12 000 ден.

Магницкий арифметика боюнча жалаң эле чет өлкөнүн котормосун котборбостон, аны орус элине жете тургандай тилде жазган. Магницкийди математика боюнча орустардын биринчи мугалими деп айтсак болот.

III Бөлүм

АЛГЕБРАНЫН ӨНҮГҮҮ ТАРЫХЫ

3.1. АЛГЕБРАНЫН ПАЙДА БОЛУШУ

Алгебра математиканын эң негизги бөлүгү болуп эсептелинет. Алгебранын жардамы менен практикалык турмушта, илимде жана техникада кезигүүчү татаал маселелерди чыгарууга болот.

Арифметикада конкреттүү сандар менен болгон амалдарды карасак, алгебрада каалаган сандар менен болгон амалдарды жана алардын жалпы касиеттерин карайбыз.

Ар кандай маселелерди теңдемелердин жардамы менен чыгаруунун керектөөсүнөн алгебра пайда болгон. Алгебра, арифметиканын негизинде пайда болгондуктан көп кылымдар бою андан бөлүнгөн эмес. Сызыктуу жана квадраттык теңдемелерди чыгаруунун кээ бир алгебралык ыкмалары мындан 4000 жыл мурда эле Байыркы Вавилондуктарга жана Египеттиктерге белгилүү болгон. Жер участокторун ченөөдө, курулуштарды курууда теңдемелердин жардамы менен ар кандай маселелерди чыгарышкан. Ошондой эле математиканын жана астрономиянын өнүгүүсү экинчи даражадагы теңдемелерди чыгаруунуң зарылчылыгына алып келди.

Байыркы Египеттиктер изделүүчү санды өзгөчө белги менен белгилешкен. «Москва папирусунда» жана «Ахместин папирусунда» (биздин доорго чейин 1850-жыл) берилген маселелерде изделүүчү сан өзгөчө белги менен белгиленип, «хау» (саны) же «аха» (тобу) деп аталган. Египеттиктер биринчи даражадагы теңдемелердин жардамы менен чыгарылуучу маселелерди болжолдоо методу менен чыгарышкан.

«Ахместин папирусундагы» маселенин берилишин жана чыгарылышын карайлы.

Маселе: «Саны жана анын төрттөн бир бөлүгү чогуу 15 ти берет».

Маселе төмөндөгүдөй чыгарылган: «Эсептөөнү төрттөн башта; андан төрттөн бир бөлүгүн б. а. 1 ди алышың керек; чогуу 5 болот. Андан кийин 15 ти 5 ке бөл, тийиндини 4 кө көбөйт, белгисиз 12 ге барабар».

Египеттик методдо белгисиз сан катары каалагандай сан алынат, бул учурда 4 саны алынган, анын төрттөн бир бөлүгү 1 ге барабар, андан ары 4+1=5, 15:5=3, 3х4=12. Бул метод орто кылымда Азияда жана Европада «жалган болжолдоо методу» деген ат менен кеңири пайдаланылган.

Азыр теңдеме түзүү менен чыгарылмак;

$x + \frac{1}{4}x = 15$ теңдемеси, $x = 15$ болот.

Грек математиктерине алгебралык негизги амалдар белгилүү болгон, бирок алар түз сызыктын кесиндилерине гана колдонушкан. Кийинчирээк чыккан грек математиги Диофант (III—IV) биринчи жана экинчи даражадагы теңдемелерди сан түрүндө чыгарган.

Индиялыктар байыркы мезгилде эле алгебраны иштеп чыгышкан. Бирок алардын теориясы башка мамлекеттерге тараган эмес. Алардын математикалык эмгектери менен XIX кылымда гана тааныша башташкан.

Индияда сандар менен эмес жалпы түрдө берилген маселелер учурайт. Мисалы: Индия окумуштуусу Ариабхаттынын (476-жылы төрөлгөн) астрономиялык «Ариабхаттам» трактатында төмөндөгүдөй маселе берилген:

Маселе: «Эки адам барабар мүлккө ээ. Бирок ал мүлктөрдүн ар бири бирдей баадагы белгилүү сандагы буюмдардан жана белгилүү сандагы тыйындардан турат. Бирок алардын буюмдарынын саны жана акчаларынын суммасы ар кандай. Буюмдардын баасы кандай?

1881-жылы Индияда Бахшалиге жакын жерден казылган жерден табылган VI—VIII кылымдарга таандык белгисиз автордун кол жазмасында («Бахшалы кол жазмасы») төмөндөгүдөй маселе берилген:

Маселе: Төрт садага берүүчүлөрдүн экинчиси биринчисине караганда эки эсе көп берген, үчүнчүсү экинчиге караганда үч эсе көп, төртүнчүсү үчүнчүгө караганда 4 эсе көп берген. Бардыгы биригип, 132 ни берген. Биринчиси канча бергенө

Өзбек математиги ал-Хорезми IX кылымдын башында жазган өзүнүн китебин «Китаб-ал-джерб вал мукабала» (Калыбына келтирүү жана карама-каршы коюу жөнүндөгү китеп) деп атаган. Ал китеп XII кылымда латын тилинде которулуп, алгебра боюнча Европалык окуу китептеринин биринчиси болуп калды.

«Калыбына келтирүү» деп, кемитүүчүнү (терс санды) теңдеменин бир жагынан экинчи жагына өткөндө оң санга өтөөрүн түшүнүшкөн. Ал убакта терс сандар чыныгы сандар болуп эсептелбегендиктен, ал-джерб (алгебра) операциясы санды өлгөн жеринен кайра кайра жашоого келтирген операция катары, бул илимдин керемети катары көрүнгөн. Алгебраны, Европада көпкө чейин «кичине искусство» — арифметика менен катар «улуу искусство» деп аташкан.

Калыбына келтирүү искусствосунун наамы катары «алгебра» деген термин арабдарда медицина термини катары пайдаланыла баштады. Адамдын колун, бутун ж.б. органдарын калыбына келтирүү «алгебра» деп атала баштады. Ошондой эле көп мамлекеттерде «алгебра» деген сөз математиканын бир бөлүгүн гана эмес, ошону менен бирге «чыгып кеткен сөөктү кайра калыбына келтирүү искусствосун» билдирген.

Теңдемелерди чыгаруу искусствосу катары алгебранын негиздери XII кылымдан баштап, ал-Хорезмдин китеби аркылуу Европага жеткен жана андан кийинки кылымдарда Европалык математиктер тарабынан андан ары өнүктүрүлгөн.

Теңдемени ал-Хорезм эки түрдүү жол менен чыгарат.

а) ал-джебр (калыбына келтирүү), кемитүүчүнү (терс санды) теңдеменин бир жагынан экинчи жагына алып өтүп, жалган сандан, чын санга келтирүү.

б) ал-мукабала (карама-каршы коюу) — эки жагындагы барабар мүчөлөрүн таштап коюу.

Мисалы: $8x-15=3x-5$

а) $8x+5=3x+15$

б) $5x=10$

мындан $x=2$.

Алгебрага негиз салган окумуштуу катары ал-Хорезмдин өмүр баянына кыскача токтолобуз.

3.2. МУХАММЕД ИБН МУСА АЛ-ХОРЕЗМ ЖАНА АНЫН ИЛИМИЙ ЭМГЕКТЕРИ

Ал-Хорезмдин толук аты Абу Абдуллах Мухаммед ибн Муса ал-Хорезм (Хорезмден чыккан) өзбек, 783-жылы төрөлүп, 847-жылы каза болгон. Көптөгөн Орто Азиялык окумуштуулар сыяктуу эле араб халифатынын борбору Багдадда иштеген. Батыш өлкөлөрдүн математиктери Орто-Азия элинин математиктерин араб элдеринин математиктерине кошушат, себеби алар араб тилинде жазышкан.

Орто-Азия элдеринин өздөрүнүн элдеринен чыккан көрүнүктүү инсандар болгон. Математиканын көп ачылыштары азыркы убакытка чейин жеткен эмес. Баскынчылар Орто Азияны улам басып алып, илим жана маданияттын көп жетишкендиктерин талкалап, жок кылышкан.

Чыгыш өлкөлөрдө илимий турмуштун маанилүү борборлору, Самарканд, Хорезм (Үргөнч), Бухара ж.б. болгон.

IX кылымдан баштап бул шаарларда математикалык ой-жүгүртүү гүлдөп, жергиликтүү окумуштуулар пайда боло баштайт. Ушул окумуштуулардын арасынан Мухаммед ибн Муса ал-Хорезм, ал араб тилинде жазган. Багдадда илимдин гүлдөгөн мезгили Харун-ал-Рашид (786—809 жылдар) жана анын уулу ал-Мамун (823—833) башкарган мезгилинде болгон. Ошол мезгилде билимдер академиясынын функциясын аткарган «Акылмандар үйү» негизделген. «Акылмандар үйүндө» ал-Хорезм көптөгөн убакыттар бою иштеген, Ал математикага, теориялык жана практикалык астрономияга, геометрияга жана тарыхка чоң салым кошкон. Бирок анын бардык эле эмгектери сакталып калган эмес.

География боюнча анын эң көрүнүнүктүү трактаты «Жердин сүрөттөлүшүнүн китеби» деп аталган жана араб тилинде жазылып бул илимдин чыгыш өлкөлөрүндө өнүгүүсүнө чоң таасир берген.

Астрономияда ал-Хорезмдин негизги маселеси теориялык жана практикалык астрономиянын маселелерин чечүү үчүн астрономиялык жана тригонометриялык таблицаларды («зидж» деп аталган) түзүү болгон. Биринчи жолу араб тилинде синус жана тангенстин таблицасы берилген. XII кылымдын башталышында ал латын тилине которулуп, Европадагы окумуштуулар колдоно баштаган. Ошондой эле ал-Хорезм ар түрдүү элдердин календардык системасын иштеп чыккан. Практикалык астрономиядагы жылдыздуу асманды байкоого арналган орто кылымдагы аспап астролябиянын түзүлүшү жана колдонулушу жөнүндөгү трактатын жазган.

Ал-Хорезм көптөгөн илимий суроолорду чечүү менен «өз мезгилинин улуу математиги» деген атка ээ болгон. Эл төмөндөгүдөй эмгектерди жазган:

1. Индиялык арифметика жөнүдөгү китеп.
2. Ал-мукабала жана алгебралык эсептөө жөнүндөгү кыскача китеп.
3. Астрономиялык таблица.
4. Жердин сүрөтү жөнүндөгү китеп.
5. Астролябиянын түзүлүшү жөнүндөгү китеп.
6. Астролябиянын жардамында кыймыл жөнүндөгү китеп.
7. Күн сааты жөнүндөгү китеп.
8. Еврейлердин доорду аныктоосу жана алардын майрамдары жөнүндө китеп.
9. Тарых китеби.

Бул китептердин кээ бирөөлөрү бизге чейин жеткен, кээ бирөөлөрү орто кылымдагы окумуштуулардын жазуулары аркылуу берилген. Анын азыркы убакытка чейин беш китеби сакталып калган. Китептеринин бири «Арифметика» окуу китеби болгон. Анын латын тилиндеги котормосу боюнча бардык Европалык элдер он цифранын жардамы менен эсеп жүргүзүүнүн индустук жолу менен таанышышты. ал-Хорезмдин бул китеби Европада «Арифметика» китебинин негиз салуучусу болуп калды.

Ал-Хорезм өзүнүн китебинин сөз башында мындай деп жазган: «Бул анча чоң эмес окуу китебин эсеп жүргүзүү илиминде эң жеңил жана пайдалуу нерселерден, ошону менен бирге мурас мүлк, мурас бажы жөнүндөгү иштерде, мүлктү бөлүштүрүүдө, сот иштеринде, соода жана адамдардын бардык иш мамилелеринде , жер өлчөгөн, каналдар казган учурларда, геометриялык эсептөөлөрдө, ар түрдүү буюмдарда адамдарга дайыма керек боло турган нерселерден түздүм. . .».

XII кылымда Европада ал-Хорезмдин «Арифметикасын» которгондо «Индустук цифралардын арифметикасы» китеби деп аташкан. Котормо «ал-Хорезми индустук эсеп жүргүзүү жөнүндө» деген сөздөр менен башталган. «ал-Хорезми» деген сөз акырындап, «алгоризм» деген сөзгө айланып кеткен.

Акырындап алгорифм же алгоризм деп эсеп жүргүзүүнүн позициялык ондук системасынын жардамы менен жазылган арифметика аталып калган. Азыр «алгоритм» термини белгилүү маселелерди чыгарууда эсептөөлөрдүн ырааттулугун белгилейт.

Арифметика китебинде индустардын номерлөөсү берилет.

Мухаммед ал-Хорезм экиге көбөйтүүнү жана экиге бөлүүнү арифметикалык амалдар деп арифметикалык амалдарга кошкон.

Көбөйтүү амалдарын аткарууда «экиге көбөйтүүнү», «экиге бөлүүнү» колдонгон.

Мисалы:

$$
\begin{aligned}
&29\cdot 25\\
&25=1+2^{3}+2^{4}\\
&29\cdot 25=29(1+2^{3}+2^{4})\\
&29\cdot 1=29 \qquad (*)\\
&29\cdot 2=58\\
&29\cdot 2\cdot 2=116\\
&29\cdot 2\cdot 2\cdot 2=232 \qquad (*)\\
&29\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=464 \qquad (*)
\end{aligned}
$$

$$29(1+2^{3}+2^{4})=29+232+464=725$$

Ошондой эле бөлчөктөр жана бөлчөктөрдүн үстүнөн болгон арифметикалык амалдар берилген.

Ал-Хорезмдин алгебралык трактатынын араб тилиндеги кол жазмасы сакталып калган. 1342-жылкы көчүрмөсү Оксфорд университетинин китепканасында сакталууда. Анын англис тилиндеги котормосу 1831-жылы жарыяланган.

Араб тилинен латын тилине биринчи жолу 1145-жылы которулган. Андан кийин дагы көп узабай эле башка котормочу окумуштуулар аркылуу экинчи котормосу чыккан. Ал-Хорезмдин трактаты, алгебранын башталышы болуп саналат.

Ал-Хорезмдин трактаты төмөнкү башталыш менен белгилүү: «Калыбын келтирүү жана карама-каршы коюу жөнүндөгү кыскача китеп». Трактат теориялык жана практикалык болуп экиге бөлүнгөн. Трактаттын биринчи бөлүгүндө сызыктуу жана квдраттык теңдемелердин теориясы жана кээ бир геометриялык суроолор берилген. Экинчи бөлүгүндө соода жана сот иштеринде колдонулуучу алгебралык маселелер каралган. Бул китебинде ар кандай эсептөөнү талап кылуучу иштерди алгебралык маселелерди чыгаруу менен чечүүгө боло тургандыгын көрсөткөн.

Андан ары ал-Хорезм алгебрада кандай сандар колдонулушун көрсөткөн. Эгерде арифметика жөнөкөй сандар менен иш жүргүзсө, ал эми алгебра белгисиз чоңдук, анын квадраты жана бош мүчөсү түрдөгү негизги сандар менен иштейт деген. Андан ары сызыктуу жана квадраттык теңдемелерди классификациялаган. Ал жөнүндө бул китептин 3.6.4. п. берилди.

Ал-Хорезм китебинин кийинки бөлүгүн «көбөйтүү жөнүндө» деп атаган. Анда бир мүчө менен эки мүчөнү көбөйтүүнүн эрежелерин берүү менен мисалдарды көрсөткөн.

Мисалы: (10—x) (10+x) тин көбөйтүндүсүн төмөндөгүчө түшүндүрөт:

«Эгерде он дирхемди он дирхемге көбөйтсө, анда он көбөйтүлгөн он, жүз дирхем. Кемитүүчү буюмду онго көбөйтсөң, кемитүүчү он буюм болот. Буюмду онго көбөйтсөң, кошулуучу он буюм болот. Кемитилүүчү буюмду, буюмга көбөйтсөң, кемитүүчүнүн квадраты болот. Мунун баары квадратсыз 100 дирхем жана буюмдун квадраты болот».

Азыркы символдор менен жазганда төмөндөгүнү түшүндүрөт:

$$(10-x)(10+x)=10\cdot 10-10x+10x-x\cdot x=100-x^2.$$

Мында оң жана терс сандар термининин ордуна «кошулуучу« жана «кемитүүчү« сөздөрү колдонулат. Бул эрежелер терс сандар киргизилгенге чейин колдонулган.

«Чоңойтуу жана кичирейтүү» бөлүгүндө иррационалдык тамырдын эрежеси жазылган. Иррационалдык санды «ассам» (дүлөй, түнт) деп атаган. Бул сандын кандай сан экендигин айтууга мүмкүн эмес деген. Ал-Хорезм мисалдарда тамырлар менен амал жүргүзүүнү караган. Каралган төмөндөгү мисалдарды карайлы.

1) $(\sqrt{200}-10)+(20-\sqrt{200})=\sqrt{200}-10+20-\sqrt{200}=20-10=10.$

2) $(20-\sqrt{200})-(\sqrt{200}-10)=20-\sqrt{200}-\sqrt{200}+10=30-2\sqrt{200}=30-\sqrt{800}.$

3) $2\sqrt{x}=\sqrt{2\cdot 2x}=\sqrt{4x}.$

4) $\frac{1}{2}\sqrt{9}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 9}=\sqrt{9\cdot\frac{1}{4}}=3\cdot\frac{1}{2}.$

5) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{50}.$

6) $2\sqrt{9}\cdot 3\sqrt{4}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{36}=36.$

Ал-Хорезм мисалдарды сөз түрүндө талкуулаган. Ал талкуулоо алгебралык мүнөздө болгон. Бирок ал-Хорезм өзүнүн жыйынтыктарын геометрия түрүндө далилдөө керек деп эсептеген.

Китептин калган үч бөлүгүндө алгебралык маселелер берилген. Бул маселелердин көпчүлүгү кийинки жашаган окумуштуулар аркылуу алгебра окуу китебине киргизилген.

3.3. АЛГЕБРАНЫН ТАМГА СИМВОЛИКАСЫ

Ал-Хорезми өз убагында алгебранын мүнөздүү өзгөчөлүгүн, арифметикада каралган маселелерди жалпы түрүндө карай тургандыгын көргөн. Ошондуктан алгебраны көп учурларда жалпы же универсалдуу арифметика деп аташкан.

Алгебрада тамгаларды колдонуу абдан узак убакыт өнүгүүнүн натыйжасында пайда болгон.

Издеген сандарды жана алардын үстүнөн аткарылуучу амалдарды белгилөө үчүн атайын белгилерди, алгебрадагы тамга символикасын колдоно баштагандыгын байыркы Вавилондуктардан эле көрүүгө болот.

Белгисиз изделүүчү санды белгилөө үчүн Египеттиктер өзгөчө белгини пайдаланышкан.

Грек математиги Диофант белгисизди жана анын даражаларын, кемитүү жана барабардык амалдарын белгилөө үчүн белгилери болгон. Диофант алдын ала айырманы таппастан туруп, көбөйтүүнү аткаруу керек экендигин билген. Диофантта бирок терс сандар болгон эмес.

Ошондой эле Диофант белгисиз сандарды символикалар менен жазып баштаган.

x^0	$\overset{0}{M}$
x^1	S
x^2	Δ^Y
x^3	K^Y
x^4	$\Delta^Y\Delta$
x^5	ΔK^Y
x^6	$K^Y K$

21-сүрөт. Диофанттын алгебралык символдору.

Белгисиз сандар «аритмос» (сан) ς (гректин «сигма» деген тамгасы болуш керек) деп белгиленген. Белгисиздин экинчи даражасы «динамис», үчүнчү даражасы «кубос», төртүнчү даражасы «динамо-динамис», бешинчи даражасы «динамо-кубос», алтынчы даражасы «кубо-кубос» деп аталган.

Араб тилинде жазылган Орто Азиялык математиктердин эмгегинде изделүүчү белгисиз санды «буюм» деп аташкан (аларда тамга символикасы болгон эмес). «Буюм» дегендин биринчи тамгасы «х» ти берип, изделүүчү белгисиз х менен белгиленген. Бирок XVI кылымга чейин алгебра сөз жүзүндө баяндалып келген.

Француз математиги Виет (1540—1603) жана анын замандаштары тамга менен белгилөөнү жана символдорду кеңири масштабда киргизишти.

Виет коэффициеттерди латындын үнсүз чоң тамгалары B, D, G, . . . , белгисиздерди чоң үндүү тамгалары A, E, I, . . . менен белгилеген.

Декарт коээфициенттерди латындын кичине тамгалары a, b, c, . . ., менен ал эми белгисиздерди алфавит боюнча акыркы тамгалар x, y, z менен белгилөөнү киргизген.

XVI кылымдын башында айрым математиктер сандын даражасын даража көрсөткүч аркылуу белгилөөнү киргизишти, бирок XVIII кылымда деле аа, ааа, аааа жазуулар кезигип келген.

Эки туюнтманын барабардыгын белгилөө үчүн колдонулуучу белгини, 1557-жылы англиялык автор Роберт Рикорд англиялык тилдеги биринчи алгебра китебинде сунуш кылган.

(—), (+), (x), (:) белгилеринин киргизилиши жөнүндө 1-бөлүктө каралган.

$\sqrt{}$ белгиси жөнүндө r тамгасынан (radix — тамыр) келип чыккан деп айтылат. Эң эски кол жазмаларда тамыр чыгарууну талап кылынган сандардын алдына чекит коюлган, ал эми андан кийинчирээк чекит же оң жакка жана жогору багытталган сызыкчасы бар кууш ромб коюлган.

XVII кылымдан баштап белгисиз сандарды латын алфавитинин тамгалары менен белгилей башташты. Бирок көпкө чейин теңдемедеги белгисизди R (Radix-тамыр) тамгасы менен белгилеп келишкен. Ал эми анын квадратын q (quadratus) тамгасы менен белгилешкен.

Алгебрага тамга символикасын киргизүүдөн жана терс сандын түшүнүгүн өздөштүрүүдөн кийин биринчи даражадагы теңдемелерди чыгаруу, сандар менен амалдар жүргүзүүнүн закондоруна келтирилди.

И. Ньютондун «Жалпы арифметика» китеби Виеттин, Декарттын жана башка окумуштуулардын риторикалык жана геометриялык алгебрасынан символикалык азыркы алгебрага өтүү болду.

Өзүнүн китебинин киришүүсүндө минтип жазат: «Эсептөөлөр кадимки арифметикадагый сандардын же алгебрадагыдай тамгалардын жардамы менен жүргүзүлөт. Эсептөөнүн эки жолу бир гана максатты көздөйт: арифметика — жекече жол менен; алгебра — жалпы жол менен. Арифметиканын амалдарынын бардыгы алгебра үчүн абдан зарыл, экөө биригип толук илимди түзүшөт. . .»

Ньютон тамгаларды, алгебралык туюнтмаларды жана теңдемелерди жаза турган «амалдардын белгиси» деп атаган.

Алгебранын илим жана окуу предмети катары өнүгүүсүнө улуу Англиялык физик жана математик И. Ньютондун «Жалпы арифметика» китеби (1707) чоң роль ойноду.

Ньютон «Жалпы арифметикасында» тамгаларды, амалдардын белгиси ал эми алгебралык туюнтмаларды жана теңдемелерди алгебранын тили деп атаган. «Маселени чыгаруу үчүн, анын кадимки тилден символикалык туюнтманын алгебра тилине которуу гана керек» деген. Которуу деп, берилген маселени чыгаруу үчүн теңдемелерди түзүүнү айткан.

Төмөндө Ньютондун мисал кылып көрсөткөн маселеси:

Маселе: Көпөстүн кандайдыр бир суммадагы акчасы болгон, ал акчадан жыл сайын үй-бүлөсү үчүн 100 фунттан короткон, калган суммага анын үчтөн бир бөлүгүн кошуп турган. Үч жылдан кийин анын акчасы эки эсеге көбөйгөндүгүн байкаган. Ал көпөстө алгач канча акчасы болгон?

Кадимки тилде	Алгебра тилинде
Көпөстүн кандайдыр бир суммада акчасы болгон:	x
Биринчи жылы 100 ф. жок кылгандан кийин, калганы:	$x-100$
Калган акчага, анын үчтөн бир бөлүгүн кошкондо, болгон акча:	$(x-100)+\frac{x-100}{3}=\frac{4x-400}{3}$
Кийинки жылы дагы 100 ф. жок кылгандан кийин, калганы:	$\frac{4x-400}{3}-100=\frac{4x-700}{3}$
Калган акчаны үчтөн бир эсе көбөйткөндөн кийин:	$\frac{4x-700}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4x-700}{3}=\frac{16x-2800}{9}$
Үчүнчү жылы дагы 100 ф. Жок кылгандан кийин калганы:	$\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3700}{9}$
Калган акчаны дагы, үчтөн бир бөлүккө көбөйткөндөн кийин:	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{16x-3700}{9}=\frac{64x-14800}{27}$
Чогулган акча биринчи жылга караганда, эки эсе көп:	$\frac{64\ x-14800}{27}=2x$

Ошентип Ньютон берилген маселе төмөндөгү теңдеме менен берилет деген:

$\frac{64\ x-14800}{27}=2x$, мындан x табылат.

Биринчи даражадагы теңдемелердин системаларын чыгаруунун азыркы кездеги жолдору Ньютонго таандык (1707-ж).

3.4. ДИОФАНТ ЖАНА АНЫН ТЕҢДЕМЕЛЕРИ

Байыркы грек математиги Диофант Александрийский болжол менен III кылымдарда жашаган. Төрөлгөн жана каза болгон жылы сакталган эмес. Анын эмгектери алгебра жана сандардын теориясында чоң мааниге ээ.

Диофант алгебраны системалык түрдө бербейт, бирок ал теңдемелерди түзүү аркылуу чыгарылуучу маселелердин системасын берет.

Байыркы гректердин «геометриялык алгебрасында» теңдемелерди чыгаруу, оң тамырларын берүүчү кесиндилерди түзүүгө келтирилген. Жаңы арифметикалык алгебра биринчи жолу Диофантта берилген. Анын эмгектеринин эң негизгилери болуп 13 китептен турган «Арифметикасы» саналат. Ал китептердин 6 китеби ушул убакытка чейин сакталган. 1463-жылы Региомонтан тарабынан Венецияда ачылган. Ал айткан: «Диофанттын бардык эмгектери «белгисизди табуу искусствосуна» арналган. Диофанттын сакталган китептеринде 189 маселе чыгарылыштары менен берилген.

Диофанттын теңдеме түзүүгө берилген маселесин карайлы:

Маселе: Бир эле санды 20 га кошуп жана 100 дон кемитсек, анда алынган сумма, айырмадан 4 эсе чоң болот. Белгисизди тапкыла.

Ошондой эле Диофант аныкталбаган теңдемелерди (диофанттык теңдемелер) чыгарууга чоң көңүл бурган. Аныкталбаган теңдемелерди майдалоо (электен өткөрүү) жолу менен чыгарган. Байыркы Индияда жана Кытайда ушуга окшош жол менен чыгарышкан жана майдалоо (электен өткөрүү) жолу деп аташкан. Диофант бир, оң тамырды табуу менен чектелген. Төмөндө диофанттык теңдемелердин чыгарылышын карайлы.

Маселе. Биринчи сандын 19 га болгон көбөйтүндүсү менен экинчи сандын 8 ге болгон көбөйтүндүсүнүн айырмасы 13 кө барабар экендиги белгилүү болсо, бул эки бүтүн санды тапкыла.

Маселе $19x-8y=13$ (1) теңдемесинин бардык бүтүн чыгарылыштарын табууну талап кылат. x жана y тин коэффициенттеринин абсолюттук маанисинин кичинесин табабыз.

Мындан: $y=\frac{19x-13}{8}$ (2)

x тин кайсыл бүтүн маанилеринде y бүтүн маанилерге ээ боло тургандыгын издөө керек. (2) ни төмөндөгүдөй жазабыз.

$$y=2x+\frac{3x-13}{8} \quad (3)$$

(3) дөн көрүнүп тургандай y качан $\frac{3x-13}{8}$ бүтүн маанилерге ээ болгондо, бүтүн маанилерди ала алат. Аны деп белгилейли.

$$y_1=\frac{3x-13}{8} \quad (4)$$

$3x-8y_1=13$ (5) теңдемесине келебиз.

Жогорудагы теңдеш өзгөртүүлөрдү жүргүзүп, төмөндөгүнү алабыз.

$$x=\frac{8y_1+13}{3}=2y_1+\frac{2y_1+13}{3} \quad (6)$$

x белгисизи $y_2=\frac{2y_1+13}{3}$ (7) бүтүн болгон учурда бүтүн маанилерди ала алат.

Мындан, $3y_2-2y_1=13$ (8) теңдемесин алабыз.

Жогорудагы теңдеш өзгөртүүлөрдү жүргүзөбүз.

$$y_1=\frac{3y_2-13}{2}=y_2+\frac{y_2-13}{2} \quad (9)$$

$y_3 = \frac{y_2 - 13}{2}$ (10) десек

$y_2 - 2y_3 = 13$ (11) теңдемесин алабыз.

(11) ден, $y_2 = 2y_3 + 13$ (12) .

(6) га маанилерин удаалаш коюу менен төмөндөгүнү алабыз.

$$x = 2y_1 + y_2 = 2(y_2 + y_3) + y_2 = 3y_2 + 2y_3 = 3(2y_3 + 13) + 2y_3 =$$
$$= 8y_3 + 39;$$

$$y = 2x + y_1 = 2(8y_3 + 39) + y_2 + y_3 = 19y_3 + 91.$$

$x = 8y_3 + 39$

$y = 19y_3 + 91$

$y_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$

маанилеринде теңдеменин бүтүн чыгарылыштарын берет.

Төмөнкү таблицада теңдеменин чыгарылыштарын беребиз.

y_3	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	15	23	31	39	47	55	63
y	34	53	72	91	110	129	148

Индия математиктери теңдемелерди чыгарууда Диофант колдонгон эрежелерди колдонушкан жана теңдемелерди чыгарууда терс тамырларды да карап, аларды карыз же чыгым катары түшүнүшүп, сандын үстүнө чекит же анын жанына кичинекей крест коюп белгилешкен.

3.5. АЛГЕБРАЛЫК БӨЛЧӨКТӨР

Диофанттын «Арифметикасында алгебралык бөлчөктөр менен көп маселелер бар. Азыркы биздин символдор менен жазылган төмөндөгү алгебралык бөлчөктөр менен болгон амалдарды карайлы.

1) $$\left(\frac{144}{x^4+900-60x^2}\right)\cdot 30+\frac{60}{x^2-30}=\frac{60x^2+2520}{x^4+900-60x^2}$$

2) $$\frac{96}{x^4+36-12x^2}-\frac{12}{6-x^2}=\frac{12x^2+24}{x^4+36-12x^2}$$

И. Ньютондун «Жалпы арифметика» китебинде алгебралык бөлчөктөр түшүнүгүнө төмөндөгүдөй келет.

«Бир чоңдуктун астына экинчи чоңдукту сызыкчанын жардамы менен бөлүп жазуу, жогору жакта жайланышкан чоңдукту, төмөндөгү жайланышкан чоңдукка бөлүү же алардын катышын берет».

Мисалы: a чоңдугу 15 болсо, ал эми b чоңдугу 5 болсо анда, $\frac{a}{b}$ чоңдугу a ны b га бөлүүдөн келип чыгат. Ушул сыяктуу эле $\frac{ab\ -\ bb}{a\ +\ x}$ чоңдугу ab—bb чоңдугун a+x чоңдугуна бөлүүдөн келип чыгат. Ушул сыяктуу чоңдуктар бөлчөктөр деп аталат.

Андан ары төмөндөгү учурларга токтолот:

1) $3\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}$ бирок $3\frac{a}{b}=3\cdot\frac{a}{b}$

2) Алгебралык бөлчөктөрдү тигил же бул сандык маанилеринен ажырата билүү. Бөлчөктүн сандык мааниси, бөлчөккө кирүүчү тамгалардын сандык маанисине карата болот. Мисалы: $\frac{a}{b}$ бөлчөгүнүн сандык мааниси $a=3, b=5$ болгондо $\frac{3}{5}$ кө барабар.

3.6. КВАДРАТТЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

3.6.1. БАЙЫРКЫ ВАВИЛОНДОГУ КВАДРАТТЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

Жер участокторунун аянттарын табуу, ошондой эле математика жана астрономия илимдеринин өнүгүүсү экинчи даражадагы теңдемелерди чыгаруунун зарылчылыгына алып келди.

Вавилондо биздин доорго чейин XX кылымда эле квадраттык теңдемелерди чыгарууну билишкен. Азыркы биздин жазуулар менен жазганда төмөндөгүдөй толук квадраттык теңдемелер кездешет.

$$x^2 + x\frac{3}{4}, \quad x^2 - x = 14\frac{1}{2}.$$

Бул тендемелер негизинен азыркыдай жол менен чыгарылган. Чыгаруунун жолдору кайсыл жактан алынганы берилген эмес. Вавилондо ошол убакта алгебра жогорку деңгээлде өнүксө дагы, аларда тендемелердин жалпы чыгарылыштары көрсөтүлгөн эмес жана терс сандар менен тамырлары берилген эмес.

Вавилондуктардын математикалык маселелеринин шарты жана чыгарылышы далилдөөсүз сөз менен берилген. Анда тигил же маселени кандайча чыгаруу керек экендигинин гана көрсөтмөсү берилет. Алардын биздин эрага чейинки XX кылымдардагы «геометриялык алгебрасы« абстрактуу мүнөздө болгон, белгисиздер болуп «тик бурчтуктун жактары», «узундугу» жана «туурасы», ал эми көбөйтүндүсү аянтын берген.

Маселе: Тик бурчтуктун аянты жана жактарынын суммасы белгилүү болсо, тик бурчтуктун жактарын тапкыла.

Маселе теңдемелер системасын түзүүгө келтирилет.

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases} \qquad (1)$$

Мындай системалар жардамчы белгисиздерди киргизүү менен чыгарылган. Негизинен (1) тендемелер системасы Вавилондук метод менен төмөндөгүдөй чыгарылган.

$$x=\frac{a}{2}+z\,, \qquad y=\frac{a}{2}-z$$

$$\left(\frac{a}{2}+z\right)\left(\frac{a}{2}-z\right)=b$$

$$\frac{a^2}{4}-z^2=b$$

$$b+z^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad z^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2-b$$

Мындан: $x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$

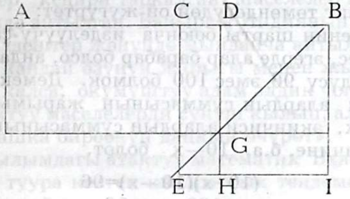
$$y=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}\,.$$

3.6.2. БАЙЫРКЫ ГРЕКТЕРДИН КВАДРАТТЫК ТЕНДЕМЕСИ

Байыркы гректерде «геометриялык алгебра» кеңири пайдаланылган. Евклиддин, Архимеддин, Аполлония жана башка окумуштуулардын улуу эмгектери «геометриялык алгебра» аркылуу негизделген. Евклиддин «Башталмасындагы» теореманы карайлы, бул теореманын негизинде квадраттык теңдеменин чыгарылышын табууга болот.

Теорема: (2-китеп. 5-сүйлөм).

Эгерде AB кесиндиси эки барабар эмес AD жана DB кесиндилерине бөлүнсө, анда жактары ушул кесиндилер болгон тик бурчтуктун аянты менен жагы бул кесиндилердин айырмасынын жарымы болгон квадраттын аянтынын суммасы, жагы AB кесиндисинин жарымы болгон квадраттын аянтына барабар.



22-сүрөт.

$$|AD| = x. \qquad |DB| = |BM| = y$$

$$|AC| = |CE| = \tfrac{1}{2}|AB| = \tfrac{x+y}{2}.$$

$$|CD| = |EH| = \tfrac{x-y}{2}.$$

Анда $xy + (\frac{x-y}{2})^2 = (\frac{x+y}{2})^2$.

Кээ бир математик тарыхчылар (Нейгебауэр, Ван дер Варден ж. б.) Евклиддин геометриялык жыйынтыгын, Вавилондуктардай жасагандыгын белгилеп кетишкен.

Эгерде $b = xy$ вавилондуктардын маселесинде жана $z^2 = \frac{a^2}{4} - b$ экендигин эске алсак,

$$(\frac{a}{2})^2 = (\frac{x+y}{2})^2.$$

Диофант маселелерди чыгарууда квадраттык теңдемелердин чыгарылышы жеңил боло тургандай кылып, белгисиздерди тандоо менен теңдемелерди түзөт.

Мисал үчүн анын теңдемелеринин бирин карайлы.

Маселе: Эки сандын суммасы 20, ал эми көбөйтүндүсү 96 болсо, аларды тапкыла.

Диофант төмөндөгүдөй ой-жүгүртөт:

Маселенин шарты боюнча изделүүчү сандар барабар эмес, эгерде алар барабар болсо, анда алардын көбөйтүндүсү 96 эмес 100 болмок. Демек, сандардын бири алардын суммасынын жарымынан чоң б.а. $10+x$, экинчиси алардын суммасынын жарымынан кичине, б.а. $10—x$ болот.

$$(10+x)(10—x)=96$$
$$100—x=96$$
$$x—4=0$$

Мындан $x=2$ деп табат, $x=—2$ деген чыгарылышын бербейт, анткени Диофантта терс чыгарылыш жок, себеби грек математиктери терс сандарды билген эмес.

Изделүүчү сандын бири 12, экинчиси 8 экендиги табылган.

Эгерде биз бул маселени чыгарсак, төмөндөгү теңдемени түзмөкбүз:

$$x(20—x)=96$$
$$x^2—20x+96=0$$

Диофант белгисиздерди тандоо менен квадраттык теңдемени чыгарууну жеңилдетет. Мында толук эмес квадраттык теңдемени чыгарууга келтирилет.

3.6.3 ИНДИЯДАГЫ КВАДРАТТЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

Квадраттык теңдемелер индиялык математик жана астроном Ариабхатта 499-жылы жазган «Ариабхаттиам» трактатында кездешет.

VII кылымдагы математик Брахмагупта квадраттык теңдеменин жалпы чыгарылышын жана каноникалык формасын берет.

$$ax^2+bx=c, a>0.$$

Теңдеменин терс чыгарылыштары дагы каралып, азыркы чыгарылыштар менен дал келет.

Индияда жалпы элдин астына чыгып жогорулатылган кыйындыктагы маселелерди чыгаруу боюнча мелдештер кеңири таркалган. Маселелер негизинен ыр түрүндө айтылган. Байыркы Индиянын бир китебинде мелдештер жөнүндө мындайча айтылган:

«Күн кандай өзүнүн жарыгы менен жылдыздарды жаап калса, окумуштуу адам элдик чогулуштарда кызыктуу маселелерди сунуш кылып, аларды чыгарып, башка бирөөнүн даңкын өчүрөт».

XII кылымдагы атактуу математик Бхаскаранын маселеге туура келген квадраттык теңдемени чыгаруусун карайлы.

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2+12=x$$

Андан кийин төмөндөгүдөй жазат:

$$x^2-64x=-768$$

Сол жагын тең квадратка толуктоо үчүн барабардыктын эки жагына тең 32^2 нин квадратын кошот:

$$x^2-64x+32^2=-768+1024.$$

$$(x—32)^2=256.$$

$$x—32=\pm 16$$

$$x_1=16.x_2=48.$$

3.6.4. АЛ-ХОРЕЗМДИН КВАДРАТТЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРИ

Ал-Хорезм сызыктуу жана квадраттык теңдемелердин 6 түрүн көрсөтүү менен төмөндөгүдөй түшүндүрөт:

1) «Квадраттар тамырларга барабар», $ax^2=bx$.
2) «Квадраттар сандарга барабар», $ax^2=c$.
3) «Тамырлар сандарга барабар», ах=с.
4) «Квадраттар жана сандар тамырларга барабар», $ax^2+c=bx$.

5) «Квадраттар жана сандар тамырларга барабар»,

$$ax^2 + bx = c.$$

6) «Тамырлар жана сандар квадраттарга барабар»,

$$bx + c = ax^2.$$

Теңдемелердин ар бир түрүнө төмөндөгү мисалдарды берген:

$1) x^2 = 3x; \frac{1}{5}x^2 = 4x.$

$2) x^2 = 7; 5x^2 = 75; \frac{1}{3}x^2 = 18.$

$3) x = 4; 4x = 24; \frac{1}{6}x = 12.$

$4) x^2 + 10x = 39; 2x^2 + 10x = 48; \frac{1}{2}x^2 + 5x^2 = 28;$

$5) x^2 + 21 = 10x.$

$6) 3x + 4 = x^2$

Белгисиз чоңдукту тамыр деп атаган. Белгисиздин квадраты «мүлк» сөзү менен аталып, «өзүнө-өзү көбөйтүүдөн алынган» деп аныкталган. Теңдеменин бош мүчөсүн «дирхем» деп атаган б.а. акча бирдиги деген.

Ал-Хорезм терс сандарды колдонуудан качкан, теңдемелердин бардыгынын мүчөлөрү кошулуучулар болуп, кемитүүчүлөр болгон эмес. Ошондой эле нөл чыгарылышты эске алган эмес.

Толук квдраттык теңдемелерди чыгаруунун эрежесин сөз түрүндө берет. (5) түрүндөгү теңдемени чыгаруу үчүн төмөндөгү амалдарды аткаруу керек экендиги айтылат.

$$1)\ \frac{b}{2},$$

$$2)\ \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

$$3)\ \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c,$$

$$4)\ \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c},$$

$$5)\ \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Ал-Хорезм (5) түрүндөгү теңдеменин тамырлары

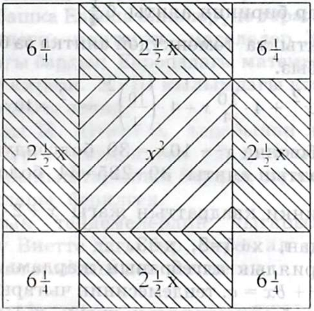
$$x=\tfrac{b}{2}-\sqrt{\left(\tfrac{b}{2}\right)^2-c}\,;\,x=\tfrac{b}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{b}{2}\right)^2-c}$$

болот деген.

Ошондой эле «Эгерде тамырды экиге бөлүп, өзүнө-өзүн көбөйткөндө, жыйынтык дирхемден кичине болсо, анда ал теңдеме чыгарылышка ээ болбойт», «Эгерде тамырды экиге бөлүп, өзүнө-өзүн көбөйткөндө, жыйынтык дирхемге барабар болсо, анда теңдеменин жалгыз, бир чыгарылышы $\frac{b}{2}$ болот» деген.

Маселе. «Квадрат жана 21 саны 10 тамырга барабар. Тамырларын тап» ($x^2+21=10x$ теңдемесинин чыгарылышын табуу).

Бул теңдеменин чыгарылышы сөз түрүндө төмөндөгүдөй чыгарылган: « Тамырлардын санын 2 ге бөлсөң 5 ти аласың, 5 ти өзүнө-өзүн көбөйт, көбөйтүндүдөн 21 ди кемитсең 4 калат. Ал эми 4 төн тамыр чыгарсаң 2 ни аласың. 5 тен экини кемитсең 3 тү аласың, бул изделүүчү тамыр болот, же 2 ге 5 ти кошсоң 7 болот, бул дагы изделүүчү тамыр болот».



23-сүрөт.

Ал-Хорезм теориялык жактан квадраттык теңдеменин эки тамырын караган, бирок практикада бир гана тамырын берген. Жогоруда каралгандай теңдемелердин чыгарылышы сөз менен берилген. Эгерде 4—5—6— түрдөгү теңдемелер жөнөкөйлөтүлбөсө, аларды геометриялык жол менен далилдөөнү сунуш кылат. Төмөндөгү маселени геометриялык жол менен чыгарылышын берет.

Маселе: «Квадрат жана 10 тамыр 39 га барабар». ($x^2 + 10x = 39$ тендемесинин чыгаруу).

Квадраттын жагы изделүүчү тамырга барабар. Жагы х болгон квадратка уланды тик бурчтуктун экинчи жагы $\frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$ болгондой кылып түзүлөт. Мында түзүлгөн 4 тик бурчтуктардын ар биринин аянты $2\frac{1}{2}x$ болот. Пайда болгон фигураны 4 кичине жагы $2\frac{1}{2}$ болгон квадраттарды кошуу менен жаңы квадратка чейин толуктайбыз. Мында кичине квадраттарды ар биринин аянты $6\frac{1}{4}$.

Жыйынтыкта төмөнкүдөй аянтка ээ болгон квадратты алабыз.

$$x^2 + 4\cdot\frac{10}{4}x + 4\cdot\left(\frac{10}{4}\right)^2 = x^2 + 10x + 25.$$

Шарт боюнча $x^2 + 10x = 39$ болгондуктан, түзүлгөн квадраттын аянты 39+225=64 болот. Түзүү боюнча кийинки квадраттын жагы $x + 2\cdot\frac{10}{4}$ кө барабар. Мындан, x+5=8, x=3.

Геометриялык алгебранын жардамы менен ал-Хорезм $ax^2 + bx = c$. тендемесинин чыгарылышын берген. Мындай геометриялык түзүү, $x^2 + px = q$ тендемесин чыгаруудагы төмөндөгү алгебралык өзгөртүүлөргө туура келет.

$$1) x^2 + 4(\tfrac{p}{4}x) + 4(\tfrac{p}{4})^2 = q + 4(\tfrac{p}{4})^2;$$

$$2) (x + 2\cdot\tfrac{p}{4})^2 = q + 4(\tfrac{p}{4})^2;$$

$$3) x + 2\cdot\tfrac{p}{4} = \sqrt{q + 4(\tfrac{p}{4})^2};$$

$$4) x = \sqrt{q + (\tfrac{p}{2})^2} - \tfrac{p}{2}.$$

3.6.5. ЕВРОПАДАГЫ КВАДРАТТЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

1202-жылы италиялык математик Леонардо Фибоначчи тарабынан жазылган «Абактар китеби» деген китебинде квадраттык теңдемени ал-Хорезмдин чыгарылышындай берген. Биринчи жолу Европада терс сандарды берген. Бул китептин негизинде XVII кылымга чейин окуу китептеринде квадраттык теңдемелерди чыгаруу берилген. Мында автор өз алдынча кээ бир жаңы алгебралык маселелерди иштеп чыккан жана алгачкы жолу Европада терс санды киргизүүнү сунуш кылган. Анын алгебралык билимдери Италияга гана эмес Германияга, Францияга жана башка Европа өлкөлөрүнө тараган. «Абактар китебиндеги» көптөгөн маселелер XVI—XVII кылымдардагы бардык Европадагы математика окуу китептерине кирген. XVIII кылымдагы кээ бир окуу китептерине дагы өткөн.

1544-жылы М. Штифель тарабынан жалпы каноникалык түргө келтирилген квадраттык теңдемелердин чыгарылыштарынын бардык мүмкүн болгон комбинациялары берилген.

Квадраттык теңдемелердин чыгарылышынын жалпы түрү Виетте дагы бар, бирок ал оң гана тамырларын чыгарылыш деп эсептеген

$$x_1 = -\tfrac{b}{2} + \sqrt{(\tfrac{b}{2})^2 - c}, \quad x_2 = -\tfrac{b}{2} - \sqrt{(\tfrac{b}{2})^2 - c}, \quad x > 0.$$

Виеттин аты менен аталган квадраттык теңдемелердин коэффициенттери жана анын тамырларынын ортосундагы байланышты берген теорема биринчи жолу 1591-жылы төмөндөгүдөй берилген: «Эгерде A көбөйтүү $B+D$ минус A^2, BD га барабар болсо, анда A, B га жана D га барабар болот».

Виет ошол убактагы бардык математиктер сыяктуу эле үндүү тамгаларды белгисиз деп, А ны белгисиз сан катары караган.

Үнсүз тамгалар B, D коэффициентер болгон.

Азыркы алгебранын тили менен жазганда Виеттин теоремасы төмөндөгүдөй жазылат:

$$(a+b)x - x^2 = ab,$$

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0,$$

$$x_1 = a, x_2 = b.$$

Бирок, Виет терс тамырларды караган эмес, ал эки тамыр тең оң болгон учурларды гана караган.

XVII кылымда гана Жирар, Декарт жана Ньютондордун эмгектеринин негизинде гана квадраттык теңдемени чыгаруу азыркы түргө келтирилет.

3.7. АРИФМЕТИКАЛЫК ЖАНА ГЕОМЕТРИЯЛЫК ПРОГРЕССИЯЛАР

Шынаа түрүндө жазылган Вавилондуктардын тарыхый жазууларында жана Египеттиктердин папирустарында арифметикалык жана геометриялык прогрессиялар кездешет.

Мында арифметикалык жана геометриялык маселелер негизинен тамактарды, буюмдарды ж.б. нерселерди өз ара бөлүштүрүү маселелелери үчүн колдонулган.

Ахместин папирусундагы маселени карап көрөлү.

Маселе. Сага 10 өлчөм сулуну 10 адамга өз ара бөлүп берүү талап кылынсын, ар бир адам менен анын кошунасынын айырмасы $\frac{1}{8}$ өлчөмгө барабар болсун.

Бул маселени жана буга типтеш маселелерди чыгарууда төмөндөгү эрежени пайдаланышкан. Биздин белгилөөлөр менен жазганда төмөндөгүнү берет.

$$a=\frac{S}{n}-(n-1)\frac{d}{2} \qquad (1)$$

Бул эреже азыркы учурдагы арифметикалык прогрессиянын чектүү мүчөлөрүнүн суммасынын формуласына эквиваленттүү.

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot n \qquad (2)$$

Ахместин папирусунда геометриялык прогрессиянын биринчи мүчөсү жана бөлүмү белгилүү болсо анын n мүчөсүнүн суммасын табуу жөнүндөгү маселелер берилген.

Вавилондуктардын шынаа түрүндөгү жазууларынан, алардын айдын жаңырганынан, толгонуна чейин байкоо жүргүзгөнүн көрүүгө болот. Төмөндөгүдөй жыйынтык чыгарышкан: Ай жаңыргандан баштап катары менен 5 күн айдын жарыгы, бөлүмү 2 болгон геометриялык прогрессия менен көбөйө тургандыгы айтылган.

Андан кийинки жазууларда $1+2+2^2+\ldots+2^9$ геометриялык прогрессиянын суммасын табышкан. Маселени чыгарган автор $S_n=2^n+(2^n-1)$ формуласын пайдаланган, ал формуланы кайдан алгандыгы жөнүндө айтылган эмес.

Биздин эранын башталышына туура келген төмөндөгү атактуу индиялык маселе-легенданы карасак болот.

«Шахмат оюну Индияда ойлоп табылган. Ошол убактагы Индия падышасы Шерам шахматты ойлоп чыгарган Сета деген окумуштууну сыйламак болуп чакырткан.

— Сета, сен ойлоп тапкан эң сонун оюнуң үчүн мен татыктуу сыйлык бергим келет. Каалаганыңды айт. Аны орундоо үчүн эч нерсени аябайм. Сенин айтканыңды орундатуу үчүн жетишерлик байлык бар, — деди падыша.

— Сенин кайрымдуулугуң өтө чоң падышам, Бирок жоопту ойлонуп берүүгө убакыт бер. Эртең жакшылап ойлонуп келип, өзүмдүн өтүнүчүмдү айтайын.

Эртеси Сета тактынын алдына келип, өзүнүн өтүнүчүнүн жөнөкөйлүгү менен падышаны таң калтырды..

— Падышам, — деди Сета, — шахмат тактанын биринчи клеткасы үчүн мага буудайдын бир данын, экинчи клеткасына 2 дан, үчүнчүсүнө 4 дан, төртүнчүсүнө 8 дан, бешинчисине 16 дан ж.б.у.с ар клетка үчүн андан мурдагы клеткадагы данга караганда эки эсе көп берүүгө буйругун.

— Жөн эле буудайдын данына? Сен өзүңдүн каалооңо ылайык, тактанын бардык 64 клеткасы үчүн өзүңдүн даныңды аласың. Бирок сенин өтүнүчүң менин марттыгыма татыктуу эмес экендигин билип кой. Баргын. Менин кызматчыларым сенин бир кап буудайыңды чыгарып беришет, — деп айраң-таң калды падыша».

Сетанын жөнөкөй өтүнүчүн падыша аткара албайт эле.

Бул маселеде $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{63}$ геометриялык прогрессиясын суммалоо талап кылынат. Анын суммасы:

$$2^{64}—1=18446744073709551615.$$

Мындай сандагы буудайды жер планетасынын бардык бетине сепкенде дагы алууга мүмкүн эмес эле.

Биздин заманга чейин V кылымда эле гректер төмөнкүдөй прогрессияларды жана алардын суммаларын билген.

$$1) 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$2) 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$$ ж. б. у. с.

Архимед (биздин доорго чейин 287—212 жылдар) өзүнүн «Псаммит» (Кумдарды эсептөө) деген китебинде биринчи жолу

$$1, 2, 3, 4, \ldots \qquad (1)$$

$$10, 10^2, 10^3, 10^4, \ldots \qquad (2)$$

арифметикалык жана геометриялык прогрессияларын салыштырып, өз-ара байланыштарын карайт.

Прогрессия деген сөз латындын «progressio» (алдыны көздөй умтулуу) дегенди билдирет. Бул термин биринчи жолу Римдик автор Боэциянын (V—VI) эмгектеринде кездешет.

Алгачкы мезгилде прогрессия деп кандайдыр бир закон аркылуу түзүлүп бир багытка чексиз улантууга мүмкүн болгон ар кандай сан удаалаштыгын түшүнүшкөн. Мисалы натуралдык сандардын удаалаштыгы, алардын квадраттары жана кубдары.

Азыркы мезгилде прогрессиялар сан удаалаштыктарынын айрым учуру катары каралат.

3.8. СЫЗЫКТУУ АЛГЕБРА. СЫЗЫКТУУ ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫ

Эки жана үч белгисиздүү сызыктуу теңдемелердин системасын чыгаруудан сызыктуу алгебра теориясы келип чыккан. Сызыктуу теңдемелер системасын чыгарууга байланыштуу аныктагыч түшүнүгү келип чыгат.

Эки белгисиздүү сызыктуу теңдемелердин системасынын чыгарылышын италиялык математик Дж. Кардано 1545-жылы өзүнүн «Улуу искусство жөнүндө» деген китебинде берет.

«Детерминант» (латын тилинен алынган determino-аныктаймын), б.а. «аныктагыч» терминин биринчи жолу азыркы мааниде О. Коши 1815-жылы киргизген. Аныктагычтар теориясы негизинен XIX кылымдын башында О. Коши, П. Лаплас, К. Гаусс ж.б. лардын эмгектеринин негизинде түзүлгөн.

«Матрица» жана «ранг» түшүнүгүн алгачкылардан болуп англиялык окумуштуу Дж. Сильвестер XIX кылымда киргизет.

Сызыктуу теңдемелер системасы, б.а. n белгисиздүү биринчи даражадагы n теңдемелер системасы, б.а. белгисиздердин саны теңдемелердин санына барабар болгон теңдемелер системасы төмөнкүдөй берилет.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

(1) системанын белгисиздеринин коэффициенттеринен түзүлгөн аныктагыч А төмөндөгүдөй жазылат.

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ . \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Же $\det A = \det(a_{n}) = |A| = |a_{n}|$ түрүндө жазылат.

Экинчи тартиптеги аныктагычтар

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

формуласы менен эсептелинет.

Эгерде (1) сызыктуу теңдемелер системасын аныктагычы нөлгө барабар болбосо, анда бул система жалгыз чыгарылышка ээ. Бул чыгарылышты биринчи жолу Г. Крамер 1750-жылы изилдеген.

3.9. ЭТЬЕН БЕЗУНУН ТЕОРЕМАСЫ

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ көп мүчөсүн сызыктуу эки мүчөгө бөлүү жөнүндөгү теорема — «Этьен Безунун теоремасы» деп аталат. Бул теореманы француз математиги, Париж Академиясынын мүчөсү Этьен Безу (1730—1783) биринчи болуп далилдеген.

Безунун теоремасы: Ар кандай көп мүчөнү эки мүчөгө бөлгөндөгү калдык $x=a$ болгондогу бөлүнүүчү көп мүчөнүн маанисине барабар.

Далилдөөсү төмөндөгүдөй жүргүзүлөт:

Бөлүнүүчү көп мүчө $f(x)$ болсун, $(x—a)$ бөлүүчүсү биринчи даражадагы көп мүчө, ошондуктан калдык нөл даражалуу көп мүчө же нөл болот. Калдыкты r аркылуу белгилейли.

Анда: $f(x)=(x—a)\,p(x)+r$ (1) болот. Мында $p(x)$ — тийинди. $x=a$ болгондо $r=f(a)$ боло тургандыгы далилденди.

Безунун теоремасынан чыккан натыйжалар

1) Эгерде $f(x)$ көп мүчөсүнүн тамыры $x=a$ болгондо $f(x)$ көп мүчөсү $(x—a)$ эки мүчөсүнө калдыксыз бөлүнөт.

2) Эгерде $f(x)$ көп мүчөсү $(x—a)$ эки мүчөсүнө калдыксыз бөлүнсө, анда a саны $f(x)$ көп мүчөсүнүн тамыры болот.

3) Эгерде $f(x)$ көп мүчөсү жок дегенде бир тамырга ээ болсо, анда бул көп мүчөнүн даражасына жараша ошончолук тамыры болот.

4) Эгерде эки көп мүчө функциялык мааниде барабар болушса, анда алгебралык мааниде да барабар болушат.

3.10. АЛГЕБРАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР

Эгер көп мүчөнү нөлгө же жалпы кандайдыр бир санга барабарласак алгебралык теңдеме алынат.

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0, \ n \in N$ (1) бир белгисиздүү алгебралык теңдеме. Эгерде $a_0 \neq 0$ болсо, анда n — теңдеменин даражасы деп аталат. $a_0, a_1, ... a_n$, тендеменин берилген коэффициенттери. Алгебралык теңдемелерди тендештикке айландыруучу х тин маанилери алгебралык тендеменин тамыры деп аталат. Теңдемени чыгаруу — белгисиздин каралуучу областагы маанилеринин бардык тамырларын табуу.

Байыркы Вавилондун математиктери 3-даражадагы жана 4-даражадагы теңдемелерди чыгарууну билишкен. Азыркы түрдөгү чыгаруунун методдору XVI кылымда табылган. Алгебра Италияда өнүгө баштады.

$x^3 + px = q$ — түрүндөгү теңдеменин чыгарылышын Болон университетинин профессору Сципион дель-Ферро (1465—1526) биринчи болуп чыгарылышын тапкан. Мында p, q — оң сандар. Теңдеменин чыгарылышын өтө жашыруун кармаган. Аны өзүнүн эки гана окуучусу билген. Анын бирөөсү Фиоре деген болгон. Жашыруун кармаганынын себеби ошол убакта Италияда математикалык эсептерди, маселелерди чыгаруу боюнча мелдештер уюштурулуп, кыйын математиктер чыгып атаандашып чыгарышкан.Атаандаштар бири-бирине мисал жана маселелерди сунуш кылышкан. Ким көп чыгарса ошол жеңген. Жеңүүчү акча, сыйлыктар менен гана сыйланбастан, университеттеги иштери боюнча дагы жогорулатылган. Ал эми мелдеште мурда чыгарылбаган мисал, маселелерди берүү абдан, жогору коюлган. Профессор дель-Ферро капысынан каза болгондон кийин, анын окуучусу Фиоре анын ачылышын пайдалануу максатында ошол убактагы көрүнүктүү математиктердин бири Николо Тартальяны (1499—1557) мелдешке чакырат. Н. Тартальянын чыныгы фамилиясы Тарталья эмес Фонтана болгон. 1512-жылы ал төрөлүп өскөн шаарды француз аскерлери басып алып, ал жерде жашап жаткан адамдарды талап-тоноп, аларды мыкаачылык менен өлтүрүшкөн. Кичинекей Николонын тилин кесип, оор жарадар кылышат. Энеси эптеп баласынын өмүрүн сактап калат. Бирок Николо өмүр бою так сүйлөй албай калган. Аны Тарталья (тантык) деп атоодон, фамилиясы ошондой айтылып калган.

Фиоре аны мелдешке чакырган учурда Тарталья 1535-жылы өзүнүн атаандашынын $x^3 + px = q$ чыгаруунун жолун биле тургандыгын түшүнөт дагы, бул теңдемени күнү-түнү чыгарууга аракеттенет. Мелдештин башталышына 8 күн калганда чыгарылышын табат. Мелдеште эки сааттын ичинде атаандашынын берген 30 маселесин чыгарып жеңишке ээ болот. Фиоре болсо Тарталья сунуш кылган маселенин бирин дагы чыгара албай калат.

Ошол убактагы Италиялык окумуштуу Джероламо Кардано (1501—1576) 1539-жылы Тартальядан үчүнчү даражадагы теңдемени чыгарууга керектүү формуланы, эч кимге айтпайм деп ант берип сурайт. Тарталья ага чыгарылышынын айрым бөлүгүн берет. 1542-жылы Кардано профессор дель-Ферронун кол жазмасы менен таанышат. 1545-жылы Кардано өзүнүн атактуу «Бир китепте улуу искусство же алгебралык нерселер жөнүндө» китебин жазат. Мында биринчи жолу үчүнчү даражадагы теңдеменин алгебралык чыгарылышы берилет.

$x^3 + px = q$ теңдемесинин чыгарылышынын төмөндөгүдөй формуласын берет.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Бул формула ушул убакытка чейин «Карданонун формуласы» деп аталат. Бирок бул формула «Ферро-Тарталья-Кардано формуласы» деп аталса туура болмок.

4-даражадагы теңдемени чыгарууну Карданонун окуучусу Луджи Феррари (1522—1565) ачкан.

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ түрүндөгү биквадраттык теңдемени чыгаруу $x^2 = y$ алмаштыруусу аркылуу $ay^2 + by + c = 0$ квадраттык теңдемесин чыгарууга келтирилет.

Жогорку даражадагы теңдемелерди чыгаруу үчүн формулаларды андан кийин көпкө изилдешкен. 1824-жылы Н. Абель даражасы төрттөн чоң болгон теңдемелер жалпы учурда радикалдарда чыгарылбастыгын далилдеген. Э. Галуа берилген теңдеменин чыгарылышын андан жөнөкөй болгон теңдемелерге алып келүүгө мүмкүн боло тургандыгын далилдеген.

XVIII кылымдын аягында К. Гаусс комплекстик сандардын көптүгүндө комплекстик коэффициенттери бар каалаган алгебралык теңдеменин комплекстик тамырынын бар экендигин далилдейт. Бул алгебранын негизги теоремасы деп аталып калды.

Эгерде $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ алгебралык теңдемесинин бир тамыры x_k, анда теңдеменин сол жагындагы көп мүчө $x - x_k$ га калдыксыз бөлүнөт.

К. Гаусстун негизги теоремасы боюнча каалаган n даражадагы көп мүчө биринчи даражадагы n — көбөйтүүчүнүн көбөйтүндүсүнө ажырайт.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

n — даражадагы теңдеменин n — тамыры болот.

Эгерде берилген c саны (1) теңдеменин сол жагындагы көп мүчөнүн чыгарылышы болсо, анда Безунун теоремасына ылайык көп мүчө (x—c) га калдыксыз бөлүнөт.

3.11. КЛАССИКАЛЫК АЛГЕБРАДАН АЗЫРКЫ АЛГЕБРАГА

Тамгалар менен жазылган амалдардын жыйынтыгын белгилүү бир эрежелер менен өзгөртүүгө мүмкүн берген теңдеш өзгөртүүлөрдүн тамгалуу эсептөөлөрү классикалык алгебранын негиздерин түзөт. Амалдар жалаң гана сандар менен жүргүзүлбөстөн ар кандай жаратылыштагы объектилер менен жүргүзүлүшү мүмкүн. Алгебра ар кандай системада берилген маселелерди изилдөө менен чыгаруу маселесин карайт. Тендеменин чыгарылышы вектор болсо вектордук алгебрада; матрица болсо, матрицалык алгебрада ж. б. каралат. Э. Галуа теориясы менен байланышкан группа теориясы пайда болот.

Эврист Галуа (1811—1832) француз математиги, революционер. Ошол убактагы королдун режимине каршы чыккандыгы үчүн эки жолу түрмөгө камалган. Түрмөдөн чыгып жаткан мезгилде дуэлден каза болгон, монархисттер уюштурган деген ойлор болгон. Галуа жаштыгына карабай биринчи болуп, «группа», «подгруппа», «талаа» түшүнүктөрүн берген. Ошондой эле жалпы алгебралык тендеменин 4-даражадан өйдө чыгарылышын изилдеген. Бирок анын изилдөөлөрүнө тирүү кезинде көп көңүл бурушкан эмес. Өлөрүнүн астында, досу француз математиги Жозеф Лиувиллге өзүнүн жаңы ачылышын кыскача жазып, жөнөткөн. Ал 1846-жылы жарык көргөн. Э. Галуа $a_0x^n + a_1x^{n\;\;1} + \ldots + a_n = 0$ (1) түрүндөгү алгебралык теңдемелер теориясын түзөт. Мындай теңдемелердин чыгарылышы башка жөнөкөй теңдемелердин чыгарылышынын шартына келтирилет.

Эгерде $x^m = A,\ x = {}^m A$ болсо жана (1) теңдеме эки мүчөлүү теңдемеге келтирилсе, анда (1) теңдеме радикал аркылуу чыгарылат. Мында ар бир теңдеме менен анын тамырларынын ордуна коюла турган кандайдыр бир чектүү топ салыштырылат. Бул топ (1) теңдеменин Галуа тобу деп аталат. Андан кийин ал топто кандайдыр бир касиеттер аткарылары же аткарылбастыгы текшерилет. Ушул суроонун жообуна жараша (1) түрдөгү теңдеменин чыгарылышка ээ боло тургандыгы же ээ болбой тургандыгы каралат.

Э. Галуага чейин көптөгөн илимий эмгектер жарыяланганга карабастан (1) түрүндөгү теңдемени камтыган жалпы теория тузүлгөн эмес.

XX кылымдыын 20—30-жылдарында жалпы алгебра пайда болот. Жалпы алгебрада, алгебралык структуралар талаа, алкак, группа, камтылган группа ж.б.у.с. ар кандай амалдар аныкталган көптүктөрдүн касиеттери жөнүндөгү илим. 30-жылдарда эркин универсалдык алгебралардын жалпы теориясы боюнча Г. Баркгофтун эмгектери пайда болот. Ал теория менен катар моделдер теориясы пайда болот, Аны негиздечүүлөр А. И. Малышев жана А. Тарский.

Кыргызстанда алгебра боюнча изилдөөлөр 1960-жылдары башталган. Алгебранын ар кайсы тармактары боюнча изилдөө иштерин Абакиров Б, Огай С. В., Кутманов З., А. А. Бөрүбаев, Сатаров. Ж. ж.б. жүргүзүүдө.

Алгебралык түшүнүктөр жана методдор математиканын бардык тармактарында кеңири колдонулат.

IV Бөлүм

АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ

4.1. САНДАР ТҮШҮНҮГҮНҮН ӨНҮГҮШҮ

Сандар түшүнүгүнүн өнүгүшү узун жолду басып өттү. Натуралдык сандар, бүтүн сандар, бөлчөк сандар, рационалдык сандар, анык сандар, комплекстик сандар. Биздин эрага чейин эле III кылымда эле адамдар натуралдык сандардын катары чексиз экендигин билишкен. Архимед өзүнүн «Псаммит» (Кумдарды эсептөө) деген эмгегинде натуралдык сандардын катарынын чексиз экендигин көрсөтүү менен каалагандай натуралдык чоң санды керек болгондо көрсөтө тургандай системаны түзгөн. Чексиз кичине жана чексиз чоң түшүнүктөрүн биринчи жолу Анаксагор (биздин эрага чейин 500—428-жыл) берген. Байыркы грек философу Аристотель (биздин эрага чейин 384—322-жылдар) математикалык мейкиндиктин чексиз экендигине байланыштуу математикалык түз сызык чексиз деп эсептеген. Байыркы грек математиктери чоң сандар менен иш жүргүзүү менен чектүүдөн, чексиздикке секирик жасашты.

Биздин эрага чейин IV кылымда Пифагордун мектебиндеги грек математиктери ченелбес кесиндилер түшүнүгүн киргизишти. Ал кесиндилерди бөлчөк же бүтүн сандар менен ченеп алууга болбойт эле. Мындай кесиндилердин бири жактары бирге барабар болгон квадраттын диагоналы. Алар ал сан үчүн туура келген кесиндинин узундугун түшүнүшкөн.

Сандарды геометриялык түрдө берүү алгачкы мезгилде математиканын өнүгүшүнө жакшы таасир берген, бирок математиканын андан ары өнүгүүсүнө кыйынчылык туудура баштаган. Иррационалдык сандар түшүнүгүнүн өнүгүшү жана анын чексиз ондук бөлчөк түрүндө жазылышы үчүн миңдеген жылдар талап кылынды. Биздин эрага чейин эле байыркы Вавилондуктар жана Египеттиктер жер өлчөө учурунда так чыгарууга мүмкүн болбогон маселелерге дуушар болушкан да аларды чамалап чыгаруу менен чектелишкен. Өз ара жалпы ченге ээ болбогон кесиндилердин бар экендиги байыркы грек математиктерине белгилүү болгон.

Арабдар жана Индиялыктар иррационалдуу сандар менен эсептөөлөрдү жүргүзүшкөн, бирок алардын жалпы теориясын түзүшпөстөн практикалык керектөөлөргө гана пайдаланышкан.

Геометрияны арифметикалаштыруу иррационалдуу сандардын теориясын түзүүгө мүмкүнчүлүк түздү. $x^2-2=0$ түрүндөгү теңдемелерди чыгаруу учурунда, квадраты 2 ге барабар болгон сандардын жок экендигине келишти.

Немец математиги Дедекинд 1872-жылы иррационалдуу сандардын аныктоосун берген. Бул метод Дедекиндин кесилиши деп аталат. Дедекиндин кесилишинде, бардык рационалдык сандар «төмөнкү» жана «жогорку» деп аталуучу эки класска бөлүштүрүлөт. Төмөнкү класстагы ар кандай a саны жогорку класстагы ар бир b санынан кичине. Эгерде A көптүгүнө a га барабар жана кичине болгон сандарды, B көптүгүнө a дан чоң сандарды бөлүштүрүү менен Дедекиндин кесилишин түзүүгө болот. Бул сыяктуу кесилиштерде же төмөнкү класстын эң чоң саны, же жогорку класстын эң кичине саны болушу мүмкүн.

Кантор иррационалдуу сандарды рационалдуу сандардын фундаменталдык катарлардын жардамы аркылуу аныктоо теориясын негиздеген.

Вейерштрасс иррационалдуу сандарды чексиз мезгилсиз ондук бөлчөк катары аныктоо методун сунуш кылган.

Сандардын өнүгүүсү ушуну менен токтолгон жок. $x^2 + 1 = 0$ сыяктуу теңдемелерди чыгарууда $\sqrt{-1}$ санына туш келишкен. Аны «жалган бирдик» (мнимый бирдик) деген наамга ээ болуп, көпкө чейин сан катарында эсепке алынган жок. Качан гана Норвегиялык математик Гаспар Вессель (1745—1818) мнимый сандарды геометриялык түрдө сүрөттөп көрсөткөндөн баштап, «мнимый сандар» комплекстик сандардын көптүгүнөн өзүнүн ордун тапты.

Комплекстик санды $a + b\sqrt{-1}$ түрүндө белгилөө Карданого тиешелүү. Эйлер комплекстик сандарды $a + bi$ түрүндө белгилей баштады, мында $i = \sqrt{-1}$. Ирландиялык математик Уильям Роуэ Гамильтондун (1805—1865) сунушу боюнча комплекстик сандарды (a, b) түгөй анык сандары түрүндө жаза башташты.

4.2. БАЙЫРКЫ ГРЕК МАТЕМАТИКАСЫНДА ЧЕКСИЗДИК ИДЕЯСЫНЫН ПАЙДА БОЛУШУ ЖАНА КОЛДОНУЛУШУ

Чексиздик идеясы байыркы мезгилде эле ааламды, дүйнөнү элестетүүдөн пайда болгон. Аалам, жаратылыш чексиз. Философияда чексиздикти убакытта жана мейкиндикте башталыштын жана аяктоонун жок экендиги менен түшүндүрүшөт.

Математикада чексиздик түшүнүгү арифметиканы окуп баштаганда эле кирет. Натуралдык сандардын чексиздиги. Геометрияда алгачкы түшүнүктөрдөн түз сызыктардын чексиздиги.

Байыркы Грецияда математика жана философия илимдери бир убакта өнүгө баштаган. Биздин эрага чейин VI кылымда эле грек философтору чексиздик проблемаларын ойлоп таба баштакшан.

Чексиздик идеялары байыркы грек математиктери тарабынан арифметиканын жана сандар теориясынын (натуралдык сандардын катары, чексиз жөнөкөй сандар ж.б.у.с.) өнүгүүсү менен иштелип чыккан.

Бул чексиздик идеясы жөнүндө Милет мектебинен Анаксимандр (биздин эрага чейин болжол менен 610—546 -жылдар) өзүнүн «Апейрон» («Предели жок») жана Анаксимен (биздин эрага чейин болжол менен 588-?-жылдар) «Жаратылыш жөнүндө» деген чыгармаларында жазышат.

Анаксагор (биздин эрага чейин 500—422-жылдар) өзүнүн чыгармасында мындай деп жазат: «Кичине чоңдуктардын ичинен эң кичинеси болбойт, бирок кичирейтүү үзгүлтүксүз жүргүзүлөт». Өзүнүн оюн жазып келип мындай дейт: «Дайыма чоңдон чоң нерсе бар».

Ал эми Пифагор жана анын окуучулары мейкиндикти чекиттердин чексиз көптүгү катары кароо менен сандар жөнүндө окууну өркүндөтүшөт.

Чексиздик түшүнүгү математиканы негиздөөдө көп кыйынчылыктарга алып келген. Бул кыйынчылыктар өзгөчө апорияларда (кыйын шарттарда) көрүнөт. Аристотелдин физика китебинде байыркы философ Зенондун (биздин эрага чейин V кылым) 45 апориялары жана аларга Симпликиянын (VI кылым) түшүндүрмөсү берилет. Биздин убакка 9 апориясы түшүндүрмөсү менен жеткен. Анын кыймылга байланышкан бир апориясын карап көрөлү.

1. **Дихотомия** (грек тилинен которогондо «тең ортосунан бөлүү».

Бул апорияда Зенон, кыймылдагы тело А чекитинен В чекитине келиш үчүн бул аралыктын (кесиндинин) $\frac{1}{2}$ бөлүгүн сөзсүз түрдө өтүш керек деген. Ал эми кесиндинин теӊ ортосуна келгенге чейин $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots$ кесиндилердин удаалаштыгын басып өтүш керек. Мындай кесиндилердин удаалаштыгы чексиз. Мындагы кыйын шарт, апориянын жыйынтыгы болуп, чексиз кошулуучулардын көптүгүнүн суммасы чектүү боло тургандыгы.

Мындан байыркы гректердин чексиз геометриялык прогрессиянын суммасын табуунун үстүнөн иштегендигин көрүүгө болот.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Зенон өзүнүн апорияларында формалдуу-логикалык көз караште чексиздик түшүнүгүн илимге киргизет.

Демокрит жолдун эӊ кичине кесиндисинин ага туура келүүчү эӊ кичине убактысына болгон катышы чектүү экендигин жана ал кыймылдын ылдамдыгын аныктай тургандыгын айткан. Демокриттин бул идеясында чексиз кичине чоӊдуктарды эсептөөнүн алгачкы ойлору жатат. Демокриттин идеяларын Архимед пайдаланып аянттарды жана көлөмдөрдү интеграциялап эсептөөнүн жолдорун түзгөн. XVII кылымдын математиктери Архимеддин эмгектерине таянып, дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөрдү түзгөн.

Улуу философ Аристотель (биздин доорго чейин IV кылым) математикалык чексиздикке чоӊ көӊүл бурган.

Азыркы мезгилде геометрияны жана математикалык анализди үйрөнүүнүн негизинде анык сандар түшүнүгү жатат. Анык сандардагы түз сызыктагы чекиттер ээ болгон үзгүлтүксүздүк касиеттерге ээ болот.

4.3. «π» САНЫНЫН ТАРЫХЫ

Байыркы Египетте диаметри d болгон тегеректин аянтын (азыркы символдор менен жазганда) төмөндөгүдөй аныктаган:

$$(d - \tfrac{d}{9})^2.$$

Бул туюнтма боюнча

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{256}{81} \approx 3{,}160\ldots$$

Биздин доорго чейин VI кылымда Индиядагы диний ыйык «джайнизм» китебинде π санын $\sqrt{10}$ го барабар деп эсептелинсин деген көрсөтмө берилген, Бул 3,162... бөлчөгүн берет.

Байыркы гректер Евдокс жана Гиппократ айлананы ченөө үчүн, ага туура келүүчү кесиндинин узундугун түзүшкөн. Ал эми тегеректин аянтын ченеш үчүн ага туура келген квадратты түзүшкөн. Математиктер көптөгөн кылымдар бою айлананын узундугунун диаметрге болгон катышын рационалдык сан катары берүүгө аракеттенишкен.

Биздин доорго чейин III кылымда «Тегеректи ченөө» деген өзүнүн эмгегинде үч шартты негиздеген:

1) Ар кандай тегерек, катеттери тиешелүү түрдө анын диаметрине жана радиусуна барабар болгон тик бурчтуу үч бурчтук менен бирдей чоңдукта болот;

2) Тегеректин аянттары, өздөрүнүн туура келүүчү диаметринин квадратына, 11 дин 14 кө болгон катышындай катышат;

3) Ар кандай айлананын узундугунун анын диаметринен болгон катышы $3\frac{1}{7}$ ден кичине жана $3\frac{10}{71}$ ден чоң.

Үчүнчү сүйлөмдү Архимед тегерекке сырттан жана ичтен сызылган туура көп бурчтуктардын периметрин удаалаш эсептөө аркылуу негиздеген. Алгачкы учурда ал ичтен жана сырттан сызылган алты туура бурчтукту алган, андан кийин ар бир туура көп бурчтуктардын жагын эки эселеген. Ошентип ал жактары 96 болгон ичтен жана сырттан сызылган туура көп бурчтукту алган. $\pi \approx 3{,}1419...$ Архимеддин эсеби боюнча.

Биздин доордун V кылымында Кытай математиги Цзу Чунчжи π нин тагыраак маанисин $\pi \approx 3{,}1415927...$ тапкан.

XV кылымдын башында Самарканддагы Улугбектин обсерваториясынын биринчи жетекчиси өзбек Джемшид бен Масуд эд-Дин ал-Каши «Айлана жөнүндө үйрөтүү» деген эмгегин жазган.

Ал китебинде ал-Каши айлананын узундугунун радиусуна болгон катышын таң калтыргандай тактыкта тапкан. Бул үчүн жактары 800 335 168 болгон туура көп бурчтуктардын жагын эсептеген. Эсептөөнү алтымыштык эсептөө системасында эсептеген. Анын тапкан натыйжаларын ондук бөлчөктөргө которсо, анда үтүрдөн кийин туура чыгарылган 17 ондук сан белгисин алган. Бул Европада ондук бөлчөктөрдүн пайда болушунан 175 жыл мурда болгон. Ал-Каши натыйжаны төмөндөгүдөй тартипте жазат.

Бүтүнү	Бөлүктөрү								
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
6	16	59	28	1	34	51	46	14	50

Бул төмөндөгүнү түшүндүрөт:

$$6+\frac{16}{60}+\frac{59}{60^2}+\frac{28}{60^3}+\frac{1}{60^4}+\frac{34}{60^5}+\frac{51}{60^6}+\frac{46}{60^7}+\frac{14}{60^8}+\frac{50}{60^9}$$

Андан кийин сандардын астына төмөндөгүлөрдү жазат:

6 283 185 307 179 586 5

Бул сан 2π санын эсеп жүргүзүүнүн алтымыштык системасынан ондук системага көчүрүлүп жазылышы болот.

Ал : 6,2831853071795865 ондук бөлчөгү болуп саналат.

Бул санды экиге бөлүп π санынын — айлананын узундугунун диаметрине болгон катышынын жакындатылган маанисин алган.

$$\pi \approx 3{,}1415926535897932.$$

Мында үтүрдөн кийинки бардык 16 белги туура чыгарылган.

π символун биринчи жолу Англиялык математик У. Джонсон 1706-жылы киргизген. Ал грек тилинде «периферия» (айлана) сөзүнүн биринчи тамгасын алган. У. Джонсон киргизген символ Л. Эйлердин 1736-жылы жазган эмгегинен кийин колдонула баштады.

XIX кылымдын аягында 20 жыл тынбай эмгектенүүнүн натыйжасында англичанин Вильям Шенкс нин 707 ондук белгисин тапкан. 1945-жылы ЭВМ дин жардамы менен Шенкстин өзүнүн эсептөөлөрүндө 520-белгиден ката кетиргендигин табышкан.

4.4. ПРЕДЕЛ ТҮШҮНҮГҮ

Байыркы мезгилде эле ийри сызыктуу трапециянын аянтын жана көлөмдөрүн эсептөөдө предел түшүнүгүнө келишкен. Биринчи жолу аянттарды жана көлөмдөрдү эсептөөнүн методдорунун теориялык негиздерин биздин доорго чейинки IV кылымда грек математиги Евдокс Книдский берген. Евдокстун методун XVII кылымда «аягына чыгуу методу» деп аташкан. Себеби тегерек менен анын ичинен сызылган көп бурчтуктардын жагын улам эки эселеп көбөйтүүдөн тегерек менен көп бурчтуктун ортосундагы мейкиндик түгөнөт. Бул метод менен Евклид, Архимед жана башка математиктер пайдаланышкан. Предел түшүнүгү көп кылымдар бою такталып келген, Евдокстун методу алгачкы түшүнүктөрдөн болуп эсептелинет. Евдокс өзүнүн методунун жардамы менен пирамиданын көлөмү ошол эле бийиктиктеги призманын көлөмүнүн үчтөн бирине барабар экендигин далилдейт.

Бул методдун жардамы менен Евклид өзүнүн «Башталмасында» бир катар теоремаларды далилдейт. Анын ичинде «эки шардын көлөмдөрүнүн катышы, радиустарынын кубдарындай катышат» сүйлөмү дагы далилденет.

«Аягына чыгуу методу» XVII—XVIII кылымдарда, кээ бир окуу китептеринде XIX кылымда жана XX кылымдын башталышында колдонулган.

Ошондой эле «бөлүнбөстүк методу» дагы предел жөнүндөгү алгачкы түшүнүктөрдөн болуп эсептелинет. Биздин доорго чейин V кылымда Демокрит материя бөлүнбөгөн атомдордон турат деген. Архимед жана Аристотель, Демокритти мейкиндиктин чекиттерин атом деп караган деп айтышкан. Анын ой жүгүртүүсү боюнча ар мейкиндиктеги нерсе өзүнүн аяккы кандайдыр бир бөлүнбөс чекитке ээ. Демокриттин «атомдору» менен чоңдуктар менен көп жалпы жагы болгон, кийинчирээк «бөлүнбөс чекиттер» термини «чексиз кичине» деп айтыла баштады.

XVII кылымда бөлүнбөстүк методунун өнүгүшү менен пределдер методу дагы өнүгө баштады. Биринчи жолу пределге өтүү фламандиялык математик А. Такке (1612—1660) тарабынан 1654-жылы берилген. Арифметикалык формада пределдик өтүү англиялык математик Джон Валлис (1616—1703) тарабынан 1656-жылы «Чексиздиктин арифметикасы» деген эмгегинде берилген. Пределдер методунун андан ары өнүгүшү Ньютондун эмгектеринде берилген.

Кеплердин, Кавальеринин ж. б. лардын XVII кылымдагы эмгектеринен кийин геометрияда чексиздик идеялары колдонула баштады. Ушул эле кылымдын аягында Европада Лейбниц жана Ньютон жетектеген эки математикалык эң ири мектептер түзүлүп, XVIII кылымдын аягына чейин иштерин улантышкан. Бул мектептер математикалык анализдин өнүгүшүнө чоң салымын кошкон.

XVIII кылымдагы окумуштуулардын математикалык ачылыштарына таянып, Коши (1789—1857), Больцано (1781—1840) ж. б. окумуштуулар XIX кылымдын биринчи жарымында чексиз кичине чоңдуктар, пределдер жөнүндөгү түшүнүктөрдү толук беришет.

Коши төмөндөгүдөй айтат: «Өзүнүн өзгөрүүсүнүн белгилүү стадиясында дайыма ар бир каалгандай оң сандын абсолюттук чоңдугунан кичине боло тургандай, б.а. айтканда кичинеден кичине боло тургандай өзгөрмө чондук чексиз кичине деп аталат».

Ал эми пределди төмөндөгүдөй аныктайт: «Эгерде бир гана чоңдукка удаалаш берилүүчү маанилер чектелбеген түрдө белгиленген мааниге жакындаса жана кандайдыр бир учурдан тартып ал мааниден абдан кичине айырмаланса анда бул калгандарынын предели болот».

Математикалык анализди негиздөөгө карата берилген Бернардо Больцанонун (1781—1848) көптөгөн теоремалары убагында жарык көргөн эмес.

Пределди «$\varepsilon. \delta$» тилинде азыркыдай аныктоо биринчилерден болуп 1880-жылы анык сандардын теориясынын варианттарынын бирин негиздөөчү немец математиги К. Вейерштрасстын эмгектеринде берилет.

XIX кылымдын аягында анык сандардын көптүгүнүн үзгүлтүксүздүгүнүн негизинде предел түшүнүгү берилет.

Lim — латындын limes (чек, предел) деген сөзүнөн алынган.

Эгерде каалагандай кичине $\varepsilon > 0$ үчүн жетиштүү чоң номер N табылып, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ удаалаштыгынын n>N шартын канааттандырган ар кандай мүчөлөрү үчүн $|a_n - a| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылса, анда a саны бул удаалаштыктын предели деп аталат.

$$\lim_{n \to \infty} a^{n} = a.$$

Предел түшүнүгү функцияларга да колдонула баштады.

XX кылымда предел түшүнүгү жалпылаштырыла баштады. Комплексттик сандардын пределинен башка, кокустук чоңдуктардын , көп өлчөмдүү векторлордун ж.б. пределдери киргизилди.

4.5. ФУНКЦИЯ ТҮШҮНҮГҮ

Функционалдык көз карандылык байыркы мезгилде эле каралган, чоңдуктардын арасындагы байланыштар, сандардын ортосундагы эрежелер.

Вавилондук окумуштуулар 4—5 миң жыл мурда эле тегеректин аянтынын формуласын $S = 3r^2$ (жакындаштырылган) табышкан. Мында тегеректин аянты радиусунан функция. Ошондой эле Вавилондуктар тарабынан колдонулган квадраттардын жана кубдардын таблицасы функциянын берилишин мүнөздөйт. Биздин доорго чейин түзүлгөн тригонометриялык таблицалар дагы мисал боло алат. Бирок функционалдык көз карандылык жөнүндөгү түшүнүк атайын өз алдынча каралган эмес.

XVII кылымда өзгөрүлмө чоңдуктар түшүнүгү пайда болушу менен математикада функция түшүнүгү келип чыкты. Функцияны өзүнүн алгачкы өнүгүү мезгилинде өзгөрүлмө чоңдук түшүнүктөрү сыяктуу эле геометриялык жана механикалык суроолор менен байланышта карашкан. Декарт жана Фермада өзгөрүлмө чоңдуктар жөнүндө түшүнүк геометриялык суроолорду изилдөөдө, каалагандай сызыкты мүнөздөөчү чекиттин абциссасынын өзгөрүлүшү менен ординатасынын өзгөрүлүшүнүн көз карандылыгын кароодо келип чыккан.

Ньютон өзгөрүлмө чоңдуктар жөнүндө түшүнүккө убакыттын өтүшүнө өтө тыгыз байланышта болгон механиканын жана чоңдуктардын суроолорун чечүүдө келген.

«Функция» (латын сөзүнөн алынган «functio» — «аткаруу») терминин биринчи жолу Лейбниц 1694-жылы киргизген. Ал, кандайдыр бир сызыкты мүнөздөөчү чекит менен байланыштуу абциссаны, ординатаны жана башка кесиндилерди функция деп атаган. Бул же тигил функцияны аткаруучу чоңдукту түшүнүшкөн.

1698-жылдан баштап, «x тен функция терминин биринчи жолу Лейбниц жана Бернулли колдоно башташкан. Лейбниц ошондой эле «өзгөрүлмө» жана «константа» (турактуу) терминдерин киргизген.

Функция жөнүндө биринчи аныктаманы швейцариялык математик Лейбництин окуучусу Иоганн Бернулли 1718-жылы төмөндөгүдөй берген: «Өзгөрүлмө чоңдуктан функция деп кандайдыр бир жол менен ушул өзгөрүлмө чоңдуктан жана турактуудан түзүлгөн сан аталат».

1748-жылы Леонид Эйлер «Чексиздик анализине киришүү» эмгегинде өзүнүн мугалими Бернуллинин функция жөнүндөгү аныктамасын тактап төмөндөгүдөй берет: «Өзгөрүлмөнүн санынан функция бул кандайдыр бир жол менен ушул санынан жана сандан же турактуу сандан түзүлгөн аналитикалык туюнтма болот».

XVIII кылымдын ичинде андан кийин дагы берилген функция жөнүндөгү аныктамаларда функция аналитикалык туюнтмалар менен теңдеш каралган. XIX кылымда табыгый илимдердин жана математиканын өнүгүшү функция түшүнүгүн андан ары жалпылап кароого шарт түздү.

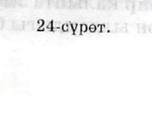
XIX кылымдын орто ченинде көптөгөн талаш-тартышуулардан кийин функция аналитикалык туюнтма түрүндө кароодон бошотулду. Функцияны аныктоодо негизги идея туура келүүчүлүк болуп эсептелинди.

XIX кылымдын экинчи жарымында көптүктөр теориясы түзүлгөндөн кийин функция түшүнүгүн аныктоодо туура келүүчүлүк теориясы көптүктөр теориясы менен бирге карала баштады.

Эгерде ар бир $x \in X$ элементине бирден бир $y \in Y$ элементи туура келсе, анда Y көптүгүнүн y элементи X көптүгүнүн x элементинен функция деп аталат. $y=f(x)$ же $f: X \to Y$ деп белгиленет.

4.6. ТУУНДУ ЖАНА ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Байыркы мезгилде эле дифференциалдык эсептөөлөргө кээ маселелер каралган. Евклиддин «Башталмасында» ийри сызыкка жаныма жүргүзүүнүн айрым учурлары берилген. Мындай маселелер Архимед тарабынан дагы каралган. Ал ийри сызык катары каралган спиралга жаныма жүргүзүүнүн жолдорун берген. Евклиддин VI китебинде берилген маселелеринин бирин карайлы. Ал төмөндөгү сүйлөм менен берилет. «Берилген үч бурчтуктун ичине сызылган параллелограммдардан негизи үч бурчтуктун негизинин жарымына барабар болгон параллелограмм эң чоң аянтка ээ болот». Азыркы терминдер менен маселе төмөндөгүчө чыгарылган.



24-сүрөт.

ABC үч бурчтугунун ичине негизи BN=x болгон BLMN параллелограммы сызылган үч бурчтук болсун. Параллелограммдын бийиктигин h менен белгилесек, анын аянты S төмөндөгүгө барабар.

$$S = h \cdot x \qquad (1)$$

$$h = BL \cdot \sin B \qquad (2)$$

$BC = a$, анда CMN жана ABC үч бурчтуктарынын окшоштугунан төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$\frac{MN}{BA} = \frac{BL}{BA} = \frac{NC}{BC} = \frac{a-x}{a}.$$

Мындан:

$$BL = \frac{BA}{a}(a - x) \qquad (3)$$

$$h = \frac{BA}{a} \cdot \sin B \cdot (a - x) \qquad (4)$$

$$S = \frac{BA}{a} \cdot \sin B \cdot x(a - x) \qquad (5)$$

Бул маселе $y = x(a-x)$ (6) функциясынын эң чоң маанисин табууга келтирилет. Мында a — турактуу сан.

Дифференциалдык эсептөөлөр, туунду жөнүндө түшүнүктөр физиканын, механиканын жана математиканын бир катар маселелерин чыгаруунун зарылдыгынан келип чыккан. Мисалы: Түз сызыктуу бир калыпта эмес кыймылдын ылдамдыгын аныктоодо, каалагандай ийри сызыкка жүргүзүлгөн жаныманы түзүүдө.

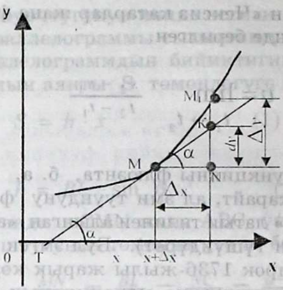
Түз сызыктуу бир калыпта эмес кыймылдын кирпик каккыча болгон ылдамдыгы биринчи жолу Ньютон тарабынан «Чексиз катарлар жана флюксия методу» эмгегинде берилген.

$$v = \lim_{t_2 \to t_2} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Ньютон функцияны флюэнта, б. а. өтүүчү чоңдук катары карайт, ал эми туундуну флюксия деп атайт («fluere» латын тилинен алынган «агуу», «агып өтүү» дегенди түшүндүрөт). Бул эмгек 1671-жылы жазылган, бирок 1736-жылы жарык көргөн. Ньютон туунду түшүнүгүнө механиканын суроолорун чечүүдө келген.

XV—XVII кылымдын математиктери каалагандай ийри сызыкка жаныманы жүргүзүүнүн жалпы методун табуунун үстүнөн иштешкен. Бул маселелер нерсенин кыймылын үйрөнүүгө жана ар кандай функциянын эң чоң, эң кичине экстремум чекиттерин табууга да байланыштуу болгон. Бул маселелердин кээ бир жекече учурлары байыркы мезгилде эле берилген. Евклиддин «Башталмасында» айланага сызылган жаныманы берген. Архимед болсо спиралга жаныма жүргүзүүнүн теориясын берген. Бирок байыркы грек окумуштуулары каалаган ийри сызыка жаныма жүргүзүүнүн жалпы методун бере алышкан эмес.

XVII кылымдын башында көп окумуштуулар кинематикалык ой-жүгүртүү менен бул маселени чечүүгө аракет кылышкан. Биринчи жолу Декарттын «Геометрия« китебинде алгебралык ийриге жаныма жүргүзүү берилген. Андан кийин Ферма жаныма жүргүзүүнүн жалпы методун берген. Ферманын ж.б. окумуштуулардын эмгектерине таянып, Лейбниц маселени толук чечип, жалпы методду түзөт.



25-сүрөт

Мында 125-сүрөт каалагандай $y = f(x)$ функциясынын М чекитинен ийриге жүргүзүлгөн жанымасынын бурчтук коэффициенти $tg\varphi$ аныкталуучу функциянын туундусун табууга келтирилет.

Туундуну табуу, анын касиеттерин үйрөнүү жана алардын ар кандай функцияларды изилдөөлөрдө пайдалануу бул дифференциалдык изилдөөлөрдүн негизги предметин түзөт.

Дифференциалдык эсептөөлөр боюнча биринчи эмгек Лейбниц тарабынан 1684-жылы «Максимумдар жана минимумдардын ошондой эле жанымалардын жаңы методу алар үчүн бөлчөк же иррационалдык санда болушу тоскоолдук кылбайт жана бул өзгөчө тектеги эсептөө» деген темада өзү тарабынан 1682-жылы түзүлгөн «Acta Eruditorum» деген математикалык журналга жарык көргөн. Бул 6 беттен турган макалада чексиз кичине чоңдуктарды эсептөө методдору жана дифференцирлөөнүн негизги эрежелери берилет. Ньютондо алгачкы түшүнүк болуп ылдамдык саналса, Лейбництин «Жаңы методу» жаныма түшүнүгү болот. Абциссанын өсүндүсүн, б.а. «чексиз кичине» айырманы $x_2 - x_1$ Лейбниц dx менен белгилейт, «*differentia*» (айырма) деген латын сөзүнүн биринчи тамгасы. $x_2 - x_1$ ге туура келүүчү ординатанын өсүндүсүн dy менен белгилейт.

XVIII кылымдын жарымында Эйлер өзгөрүлмө чоңдуктардын өсүндүсүн Δ грек тамгасы менен белгилей баштайт, б. а. $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$. Бул белгилөө ушул убакытка чейин сакталып калды.

y', $f'(x)$ туунду белгилерин биринчи жолу Лагранж киргизген.

«Туунду» термини «derivee» деген француз сөзүнөн алынган. Бул термин биринчи жолу француз Луи Арбогастанын 1800-жылы чыккан «Туундуларды эсептөө» китебинен кездешет. Бул терминди Лагранж дароо эле колдоно баштаган.

4.7. ИНТЕГРАЛ ЖАНА ИНТЕГРАЛДЫК ЭСЕПТӨӨЛӨР

Интеграл жана интегралдык эсептөөлөр түшүнүгү ар кандай нерселердин беттеринин аянттарын жана көлөмдөрүн эсептөө зарылчылыгынан байыркы мезгилде эле пайда болгон. Байыркы Грециялык математиктер интеграл түшүнүгүн бул же тигил жалпак фигуралардын квадратурасы жөнүндөгү маселелер деп, аянттарды эсептөөлөр жөнүндөгү маселелерди айтышкан.

Квадратура сөзү латын тилинен алынган, «quadratura» — «квадраттык форманы алуу» дегенди билдирет. Аянттарды табуу үчүн берилген фигураларга тең чоңдукта квадраттарды түзүү методдорун пайдаланышкан. Ошондой эле нерселердин кубатураларын б. а. көлөмдөрүн эсептөө боюнча чоң жетишкендиктерге жетишкен. Мында Евдокс сунуш кылган аягына чыгуу методун колдонушкан. Бул методдун жардамы менен Евдокс, мисалы эки тегеректин аянттарынын катышы алардын диаметрлеринин квадраттарынын катышындай катышаарын, ал эми конустун көлөмү ошондой эле негизге жана бийиктикке ээ болгон цилиндрдин көлөмүнүн $\frac{1}{3}$ не барабар экендигин далилдеген. Евдокстун аягына чыгуу методун Архимед андан ары өркүндөткөн.

Архимед өзүнүн «Параболанын квадратурасы» эмгегинде «аягына чыгуу» методун колдонуп ар кандай фигуралардын беттеринин аянтын жана көлөмдөрүн тапкан. Ошондой эле айлананын узундугун, тегеректин аянтын, шардын бетинин аянтын жана көлөмүн аныктаган. Ал айлануудан пайда болгон фигуралардын шардын, эллипсоиддин, гиперболоиддин жана параболоиддин көлөмдөрү конустун (цилиндрдин) көлөмдөрүнө келтириле тургандыгын көрсөткөн. «Параболанын квадратурасы» эмгегинен кийин «Шар жана цилиндр жөнүндө», «Спиралдар жөнүндө», жана «Коноиддер жана сфероиддер жөнүндө» эмгектерин жараткан. Архимеддин терминологиясында «тик бурчтуу коноид» айлануу параболоидин түшүндүргөн. Ошондой эле айлануу параболоид жана гиперболоиддердин сегменттеринин аянттарын аныктайт. Азыркы терминдер менен жазганда Архимед төмөндөгү интегралдарды аныктаган.

$$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}, \qquad \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3},$$

$$\int_0^a (x^2 + bx) dx = \frac{a^3}{3} + \frac{a^2 b}{2}.$$

«Шар жана цилиндр жөнүндө» эмгегинде төмөндөгү интегралды аныктаган.

$$\int_0^\alpha \sin\phi \quad d\phi = -\cos \alpha + 1.$$

Архимедде интегралдык эсептөөнүн жалпы алгоритми болгон эмес. Ал геометриялык маселелерди эсептеп чыгарган бирок бул эсептөөнүн негизинде фигуралардын жалпы эң кичине бөлүктөрүн кошуу жолу пайдалана тургандыгын көрсөткөн эмес. Ошондой эле Архимед пределдин жана интегралдын жалпы түшүнүктөрүн пайдаланган эмес.

Архимеддин интеграциондук методун уланткан XVII кылымдагы эң ири окумуштуулардын бири планеталардын кыймылынын законун ачкан, Иоганн Кеплер болгон. Ал жалпак фигуралардын беттеринин аянттарын жана нерселердин көлөмдөрүн чексиз кичине майда бөлүктөргө бөлүү жолу менен эсептеген. Мындай изидөөлөр Италиялык математиктер Б.Кавальери жана Э.Торричелли тарабынан улантылган.

$\int ydx$ символун биринчи жолу Лейбниц 1686-жылы киргизген. Мында $\int$ белгиси S (латын тилинде Summa-сумма) тамгасын узартылып жазылышы. ydx кошулуучуларынын суммасынын структурасын түшүндүргөн.

«Интеграл» термини латын тилинен алынган integer — бүтүн, бардык аянт дегенди түшүндүрөт. Бул термин 1696-жылы Иоганн Бернулли тарабынан сунуш кылынган. Ал убакытка чейин Лейбниц тарабынан киргизилген «бардык ydx тердин суммасы» туюнтма түрүндө пайдаланылган.

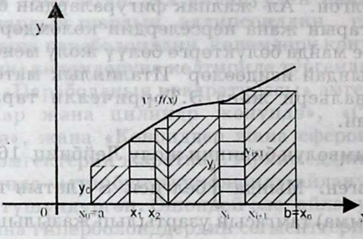
Ошондой эле интеграл $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ түшүнүгүнө интегралдык суммасынан предел табууну талап кылган геометриянын, механиканын жана физиканын ар кандай маселелерине алып келген.

Мында ξ_i, Δx_i, бөлүгүндө жайланышкан каалагандай чекит.

Аныкталган $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)dx$ интеграл үчүн түшүнүгүн биринчи жолу Ж. Фурье киргизген. a жана b сандары тиешелүү түрдө төмөнкү, жогорку пределдерин түшүндүргөн.

Жогорудагы формулага негиздеп, немец математиги Б.Риман аныкталган интегралдын аныктамасын төмөндөгүлөргө негиздеп берген.

f(x) функциясы кандайдыр бир [a,b] сегментинде берилсин дейли (26-сүрөт).



26-сүрөт.

a жана b чекиттеринин арасында каалагандай жайлаштырып, [a,b] сегментин n бөлүккө бөлөбүз. Бөлүү чекиттерин $a = x_0 < x_1 < ... x_i < ... < x_n = b$ деп белгилейли.

$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. Δx_i бөлүкчөлөрүнүн ичинен эң чоңун λ менен белгилейли. Ар бир $[x_i, x_{i+1}]$ сегментинин ичинен каалагандай $x = \xi_i$ чекитин алабыз.

$$x_i \le \xi_i \le x_{i+1}, \qquad (i = 0.1,2,...,n-1)$$

Аныктама. Эгерде $\lambda \to 0$ да $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ суммасынын чектүү I предели бар болсо, б. а. негизги аралыкты n бөлүккө кандайча кылып бөлүүгө жана алардагы $x = \xi_i$ чекиттерин кандайча тандап алууга карабастан σ суммасы бир гана I пределге умтулса, анда ал предел f(x) функциясынын [a,b] сегментиндеги аныкталган интегралы деп аталат жана төмөндөгүдөй белгиленет:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \int_a^b f(x)dx.$$

a интегралдын төмөнкү предели, *b* жогорку предели, ал эми f(x) функциясы [a,b] сегментинде интегралдануучу функция деп аталат. σ — интегралдык сумма же кээде Римандык сумма деп аташат. f(x) функциясынын чектелген функция болушу зарыл.

XVII—XVIII кылымдын математиктеринин маанилүү жыйынтыктарына карабастан, көптөгөн айрым маселелерди чыгаруунун негизиндеги жалпы идеяны бөлүп алуу, дифференцирлөө жана интегралдоо операцияларын байланыштыруу зарылдыгы турган. Бул байланышты Ньютон жана Лейбниц түзүшкөн, ал Ньютон-Лейбництин формуласы деген ат менен белгилүү:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Математикалык анализдин методдору XIX кылымда активдүү өнүктү. Интегралдык эсептөөнүн өнүгүшүнө орус математиктери М. В. Остроградский (1801—1862), В. Я. Буняковский (1804—1889), П. Л. Чебышев (1821—1894) ж. б. чоң салым кошушту.

4.8. КОМБИНАТОРИКА ЖАНА АНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

Көп учурларда чектүү сандагы элементтерден ар кандай комбинацияларды түзүүгө жана кандайдыр эреже боюнча түзүлгөн бардык мүмкүн болгон комбинациялардын (латын сөзү combinftio — биригүү) санын эсептөөгө туура келет. Мындай маселелер комбинатордук маселелер (биригүүлөр боюнча маселелер) деп аталып, аларды чыгаруу менен иш жүргүзүүчү математиканын бөлүмүн, комбинаторика (биригүүлөр жөнүндөгү илим) деп айтышат.

Математиканын бул бөлүмү ыктымалдуулук теориясында, башкаруу системалар теориясында, кибернетикада, математикалык логикада жана башка илимдин, техниканын көп тармактарында маанилүү ролду ойнойт. Комбинатордук маселелер менен жалаң гана математиктер иш жүргүзбөстөн, алар менен физиктер, химиктер, биологдор ж.б. кесиптин ээлери да иш жүргүзүшөт.

Кандайдыр бир объектилерди тандоо жана аларды кандайдыр бир ирээттүүлүктө жайгаштыруу адам баласынын турмушунда дайыма ишке ашырылат. Мисалы, адамдарды кандайдыр бир ирээтте отургузуу, сабактардын расписаниесин түзүү, жаңы механизмдин моделин жасап жаткан конструктордун тетиктерди кандайдыр бир ирээтүүлүктө жайгаштырышы, айдоо талаасына тигилүүчү дан өсүмдүктөрүн керектүү ирээттүүлүктө бөлүштүрүү ж.б.у.с.

Комбинатордук эсептөөлөргө байыркы убакта эле кызыгуу менен көңүл бурушкан. Мындан миңдеген жылдар мурда байыркы Кытайда сандарды кандайдар бир ирээтте жайгаштырууга, магикалык квадраттарды түзүүгө кызыгышкан.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Бул магикалык квадрат биздин эрага чейинки эки миңинчи жылдагы кытай математикасына таандык. Демек, ошол убакта эле кытай математикасында сандарды кандайдыр бир ирээттүүлүктө жайгаштыруу илимине кызыккандыгын көрсөтөт.

Магикалык квадрат же кызыктуу квадрат деп, «квадраттын n^2 клеткаларга бөлүнүп, каалаган горизонталдык же вертикалдык катарда турган сандардын суммасы жана ошондой эле квадраттын каалагандай диагоналдарында турган сандарынын суммасы бир эле

$$S=\frac{n(n^2+1)}{2}$$

санына барабар болгондой кылып толтурулган квадратты айтабыз».

Эгерде каалаган горизонталдык жана вертикалдык катарда турган сандардын суммасы гана бирдей болсо, анда квадратты жарым кызыктуу квадрат деп аташат.

$n=3$ болгондо кызыктуу квадраттар жөнүндөгү маселени карайлы.

$$S=\frac{3(3^2+1)}{2}=15$$

ошондой эле горизонталдык жана вертикалдык катарда турган сандардын суммасы 15 ке барабар.

Бул магикалык квадраттарды алардын борборунун айланасында 90 , 180 , 270 ка айландыруу менен $n=3$ болгондогу ар кандай магикалык квадраттарды алууга болот жана анын саны 8 ге барабар экендиги аныкталган.

XV кылымдан баштап Европалык математиктер магикалык квадраттарга көп көңүл буруу менен алардын касиеттерин иш жүзүндө пайдалана башташты.

Ошол мезгилдердеги улуу художник Дюрердин «Меланхолия» деген көркөм сүрөтүндө төмөндөгү магикалык квадрат берилет. Бул квадраттын төмөнкү катарындагы ортоңку эки сан 15 жана 14 тү удаалаш чогуу жазсак , ал көркөм сүрөттүн тартылган жылын көрсөтөт, б. а. 1514-жыл.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Дюрердин квадраты кызыктуу квадратка кирет.

Байыркы Грецияда кесилген квадраттардан өзгөчө иреттүүлүктө түзүлгөн фигураларды окуп үйрөнүшкөн.

Ошондой эле шахмат, тогуз коргоол, домино, карта ж.б.у.с. оюндарда жүрүштөрдүн ар кандай биригүүлөрүн түзүүгө болот.

Мисалы: «n ладьяны «n^2 доскага» бири-бирине коркунуч туудурбагандай кылып, канча жол менен жайгаштырууга болот?

Комбинаториканын кээ бир элементтери Индияда биздин эрага чейин 2-кылымда эле белгилүү болгон. Индиялыктар n элементтен турган көптүктү m элементтен топтоштурууну ошондой эле топтоштуруунун

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

формуласын билишкен.

XII кылымда Индиялык математиктер биригүүлөргө берилген кээ бир эсептөөлөрдү жүргүзгөн. Бирок комбинаторика биздин эранын XVI—XVII кылымында ыктымалдуулук теориясынын жана алгебранын өнүгүшүнө байланыштуу илим катары негизделген. Немец философу жана математиги Г. Лейбниц 1666-жылы жазылган «Комбинаторика искусствосу» деген китебинде , комбинаториканы математика илиминин бир тармагы катары кароо менен биринчи жолу «комбинатордук» деген терминди киргизет. Француз математиги Б. Паскаль 1665-жылы «Сандык тартиптер жөнүндө трактат» деген эмгегинде бириктирүүлөргө таянып, биномиалдык коэффициенттер жөнүндө окууну берет. Бином сөзү латын жана грек сөздөрүн бириктирүүдөн алынган (латынча bis — эки жолу, грекче «номос» — мүчө) «эки мүчө» дегенди түшүндүрөт. Орундаштыруу, орун алмаштыруу терминдерин биринчи жолу Якоб Бернулли, 1713-жылы «Болжолдоп билүүнүн искусствосу» деген китебинин экинчи бөлүгүндө киргизген. Ошондой эле биномдун n натуралдык саны үчүн ажыралышынын далилдөөсүн берген.

Ал эми И. Ньютон XVII кылымда биномдун ажыралышын чыныгы сандардын көптүгүндө караган мына ошондуктан, биномдун ажыралышы **Ньютон биному** деп аталып калган.

Азыркы бириктирүүлөрдүн белгилеништери ар кайсы авторлордун сунуштары менен XIX кылымда толукталган. Факториал (!) биринчи жолу 1808-жылы француз окуу китебинде Хр. Крамп киргизген. Факториал термини латын сөзүнөн (actor — көбөйүүчү) алынган. *1* ден n ге чейинки бардык натуралдык сандардын көбөйтүндүсү n факториал деп айтылат жана n! деп белгиленет, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Мисалы, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Ошондой эле $1! = 1$ жана $0! = 1$ экендиги айтылган.

Комбинаторика илиминин көп жетишкендиктери ошондой эле Л. Эйлерге таандык. Комбинаторика илими аныктагычтар теориясын өнүктүрүүгө чоң салым кошту. Ошондой эле эле ыктымалдуулук теориясында кеңири колдонуу менен өзү да илим катары өнүктү. Демек комбинаторика: 1) математикалык комбинаторикалык анализ; 2) элементардык математиканын түрдүү шарттарга баш ийген чектүү көптүктөн түзүлө турган биригүүлөрүнүн санын изилдөөгө байланыштуу математиканын бөлүмү.

Комбинаториканын түрлөрү болуп эсептелген орундаштырууларды, орун алмаштырууларды жана топтоштурууларды жалпысынан биригүүлөр деп аташат.

Комбинаторика көптүктөрдүн теориясы жана кортеж түшүнүгү менен тыгыз байланышта. Бул түшүнүктөр көптүктөр теориясынан кеңири берилет.

Комбинатордук маселелерди чыгаруу негизинен жөнөкөй эки эрежеге: сумма жана көбөйтүндү эрежелерине негизделген.

Комбинатордук маселелерди чыгарууда кандайдыр бир чектүү көптүктүн элементтеринен түзүлгөн маселеге алып келүүгө болот.

n элементтен турган $M = \{a,\ b,\ c,\ d, \ldots\}$ көптүгү берилсин дейли. Берилген көптүктөн, ар бири k элементтин камтыган, мында $0 < k \leq n$ ар кандай тандоону түзүүгө болот. Бул тандоо эрежеси деп аталат.

Тандоо эрежеси сумма жана көбөйтүндү эрежелерине алып келет.

СУММА ЭРЕЖЕСИ: Эгерде кандайдыр бир берилген көптүктөн x элементин n түрдүү жол менен, ал эми y элементин m түрдүү жол менен тандап алууга мүмкүн болсо, жана бул тандап алуулар бир-бири менен дал келбесе, анда «x же y» элементин тандап алуунун жолу n+m ге барабар.

Башкача айтканда кандайдыр бир элементтердин көптүгүнөн A элементин n жол менен, B элементин m жол менен тандап алууга болсо анда A элементин, же B элементин тандап алууга n+m мүмкүнчүлүк болот.

КӨБӨЙТҮНДҮ ЭРЕЖЕСИ: Эгерде кандайдыр бир берилген көптүктөн x элементин n түрдүү жол менен ал эми y элементин m жол менен тандап алууга мүмкүн болсо, анда x жана y элементтерин nm түрдүү жол менен тандап алууга болот.

Комбинаторикада каалагандай чектүү n элементтен турган X көптүгүнөн түзүлгөн m элементүү ($0 \leq m \leq n$) бардык камтылган, иреттелген көптүктөрдү n элементтен m ден түзүлгөн орундаштыруулар деп аташат.

n элементтен m ден орундаштыруунун санын A_n^m деп белгиленет.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (1)$$ ге барабар.

n элементтен m ден түзүлгөн орундаштыруулардын санын эсептөөдө (1) формуланы пайдаланабыз, бул 0 m n шартын канааттандыруучу каалагандай n жана m натуралдык сандары үчүн аткарылат. Эгерде m=0 болсо $A_n^{''} = 1$ себеби, бир гана куру көптүк болот жана ал бир гана жол менен иреттелет.

Бири-биринен ирээттүүлүгү менен гана айырмаланган n элементтен турган X чектүү көптүгүнөн түзүлгөн иреттелген бардык n элементтүү көптүктөр n элементтен түзүлгөн орун алмаштыруулар деп аталат.

n элементтен түзүлгөн орун алмаштыруулардын саны P_n деп белгиленип, $P_n = n!$ формуласы менен табылат.

Жогорудагы орун алмаштыруунун аныктамасынын негизинде орун алмаштырууну n элементтен n ден түзүлгөн орундаштыруу экендигин көрүүгө болот. Демек, орун алмаштырууларды орундаштыруулардын айрым учуру катарында кароого болот.

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!$$

n элементтен түзүлгөн орун алмаштыруулардын саны $P_n = n!$ (2) формуласы менен эсептелинет.

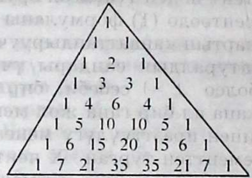
n элементтен турган X көптүгүнүн m элементтен турган чектелген камтылган көптүктөрү топтоштуруулар деп аталат. Мындай топтоштуруулардын санын

C_n^m деп белгилешет, дагы «n ден m боюнча топтоштуруулардын саны» деп аташат.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (3)$$

формула менен эсептелинет.

C_n^m маанилеринин таблицасын анын касиеттерин изилдеген француз математиги Б. Паскаль (1623—1662) төмөндөгү таблицаны түзгөн. Аны «Паскалдын үч бурчтугу» деп атоо кабыл алынган.



Комбинаториканын методдору азыркы математиканын алгебра, сандар теориясы, ыктымалдуулук теориясы ж.б. бөлүмдөрүнө кеңири тараган. Эсептөө техникасында ЭЭМде сандар менен болгон процесстерди жазуу үчүн колдонулат. Кыргыз Улуттук Илимдер Академиясында машина операция жүргүзө ала тургандай эсептөөнүн экилик системасындагы сандардын толук жана нормалдаштырылган модели түзүлгөн.

4.9. НЬЮТОН БИНОМУ

«Бином» сөзү латын жана грек сөздөрүнүн башкы сөздөрүн бириктирүүдөн алынган (латынча bis — эки жолу, грекче «номос» — мүчө) «эки мүчө» дегенди билдирет.

Бирок (1) формула, n натуралдык сан болгондо ажыралышын берет.

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n b^n \quad (1)$$

Бул формула англиялык физик жана математик Исаак Ньютондун (1642—1727) атынан Ньютон формуласы деп аталат. (1) формуланын оң жагы биномдун даражасына ажыратуу болот.

Бул формула Ньютонго чейин эле натуралдык n саны үчүн белгилүү болгон. Ал-Каши биномиалдык ажыралышты n=9 га чейин берген. Тарталье, Ферма, Паскалдар дагы биномиалдык ажыралыштардын формуласын беришкен. (1) формуланын далилдөөсүн 1713 жылы Якоб Бернулли далилдеген. Ал эми И. Ньютон бул формуланын чыныгы сандардын көптүгүндө аткарыларын далилдеген. Мына ошондуктан формула Ньютондун атын алган.

$$(a+b)^1 = a+b,$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

экендиги белгилүү. Ошондой эле,

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

экенин эсептеп чыгаруу кыйын эмес. Бул формулалардын оң жагындагы коэффициенттери Паскалдын үч бурчтугундагы тиешелүү саптардагы сандарга барабар экендигин байкоого болот.

n=1, n=2, n=3, n=4, n=5 болгон учурда барабардыктын туура экендиги көрүнүп турат.

Ошондой эле жогоруда берилген Паскалдын үч бурчтугу менен коэффициенттерин салыштырып карап көрсөк (1) формуланын тууралыгын көрүүгө болот.

$n \in N$ үчүн (1) ни далилдөөнү математикалык индукция методу менен жүргүзөбүз.

1) n= 1 болгондо туура, анткени

$$(a+b)^1 = a+b = C_1^0 a + C_1^1 b.$$

2) каалагандай натуралдык k үчүн да аткарылсын дейли,

$$(a+b)^k = c_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^m + \ldots + C_k^k b^k .$$

Эми k+1 болгондо аткарыларын далилдейли;

$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b)$ болгондуктан, $(a+b)^k$ ордуна маанисин коюп, (a+b) менен көбөйтүп, окшош мүчөлөрүн топтойбуз.

$$(a+b)^{k+1} = (C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + C_k^{k-1} ab^{k-1} +$$
$$+ C_k^k b^k)(a+b = C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + \ldots + C_k^{k-1} a^2 b^{k-1} +$$
$$+ C_k^k ab^k + C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + \ldots + C_k^{k-1} ab^k + C_k^k b^{k-1} =$$
$$= C_k^0 a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) a^k b + \ldots (C_k^{k-1} + C_k^k) ab^k + C_k^k b^{k-1} .$$

Топтоштуруулардын санынын 2-касиетин пайдаланабыз.

$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ анда төмөндөгүдөй жыйынтыкты алабыз.

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \ldots +$$
$$+ C_{k+1}^{m+1} a^{k-m} b^{m+1} + \ldots +$$
$$+ C_{k+1}^k ab^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1} .$$

Каалагандай 1, 2, 3, 4, . . ., k, k+1 натуралдык сандары үчүн (1) барабардык, б.а. Ньютондун формуласы аткарылат. Анда математикалык индукция принцибинин негизинде каалагандай натуралдык n үчүн да (1) формула аткарылат.

Демек, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ түрүндө жазылат.

С — коэффициеттери биномиалдык коэффициенттер деп аталат, k= 0, 1, 2, . . . , n.

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \text{ , k= 0, 1, . . . n} \qquad (2)$$

(2) Ньютондун биномунун k — мүчөсүнүн формуласы.

4.10. КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНДАГЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК, ИНТЕГРАЛДЫК ЖАНА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР БОЮНЧА ИЗИЛДӨӨЛӨР

Кыргыз Республикасында математикалык илимий изилдөөлөр 1940-жылдарда Г. А. Сухомлиновдун жетекчилиги астында жүргүзүлүп башталды. Кыргыз илимдер академиясынын 1954-жылы түзүлүшү жана анда физика-математика институтунун 1960-жылы ачылышы математиктердин изилдөөлөрүн жакшыртууга чоң түрткү болду. Кыргыз математиктеринин изилдөөлөрү математиканын түрдүү тармактарына тиешелүү. Негизги изилдөөлөр дифференциалдык, интегралдык жана интегро-дифференциалдык теңдемелердин үстүнөн кеңири жүргүзүлгөн. Бул изилдөөлөр боюнча 15 тен ашык илимдин докторлору, 100дөн ашык кандидаттар даярдалган. Кыргыз окумуштуулары көптөгөн эл аралык ж. б. конференцияларда докладдар менен чыгышкан. Өзгөчө бул тармак боюнча М. Иманалиев, Я. В. Быков, И. Боташев, С. Каримов, П. С. Панков, А. Саадабаев ж. б. илимдин докторлорунун салымы чоң.

Дифференциалдык теңдемелердин чыгарылыштарынын чектелгендиги, квадраттарынын жарым окто интегралданууччулугу, нөлгө умтулууччулугу жана алардын асимптоталык туруктуулугу изилденген. Ошондой эле дифференциалдык теңдемелер үчүн Коши маселеси жана чектик маселе теориясы, мезгилдүү жана мезгилдүү дээрлик теориялар ж.б. иштелип чыккан.

Вольтерра тибиндеги бир тектүү эмес сызыктуу теңдемелердин системасынын жалгыздыгы, жалгыз эместиги, туруктуулугу ж.б. изилденген. (1) же (2) түрдөгү теңдемелер Вольтерра тибиндеги теңдемелер деп аталат.

$$\int_a^x K(x,t)u(t)d(t) = f(x) \qquad (1)$$

же

$$u(x) - \int_a^x K(x,t)u(t)d(t) = f(x) \qquad (2)$$

мында x, t, a — чыныгы сандар, жалпы айтканда комплекстик параметр, $u(x)$ — белгисиз функция, $f(x), K(x,t)$ — $a \le x \le b$, $a \le t \le b$ кесиндилеринде квадраттары суммалануучу берилген функциялар.

Интегро-дифференциалдык теңдемелер үчүн Коши маселеси жана чектик маселелери, мезгилдүү, дээрлик мезгилдүү жана чектелген чыгарылыштары изилденген жана теориялары иштелип чыккан.

Айтылган багыттар боюнча абдан чоң изилдөөлөр жүргүзүлүү менен техникада жана айыл-чарбасында кеңири пайдаланууга берилген. Бул изилдөөлөрдү жүргүзүүдө Кыргыз Улуттук Академиясынын академиги, профессор М. И. Иманалиевдин салымы өтө чоң. Кыргыз элинен чыккан биринчи физика-математика илимдеринин доктору М. И. Иманалиевдин өмүр баянына кыскача токтолуп кетели.

Иманалиев Мырзабек Иманалиевич 1931-жылы 13-сентябрда Кыргыз Республикасынын Кемин районуна караштуу Кайыңды айылында туулган. 1949-жылы Фрунзедеги № 5 орто мектебин аяктап, ошол эле жылы Кыргыз Мамлекеттик Университетинин физика-математика факультетине кирген. 1953-жылы университетти кызыл диплом менен аяктап, математик адистигине ээ болгон. Аспирантураны Москвадагы М. В. Ломоносов атындагы университетте окуп аяктары менен, 25 жашында интегро-диференциалдык теңдемелердин чыгарылыштары боюнча кандидаттык диссертациясын жактаган.

М. И. Иманалиев Кыргыз Мамлекеттик Университетинде 1957-жылдан баштап иштеген, алгачкы учурда окутуучу, улуу окутуучу, ошол эле убакта университеттин комсомол уюмунун секретары милдетин аткарган. 1960-жылдан 1962-жылга чейин окуу иштери боюнча проректор. 1964-жылы Ташкенттен интегро-дифференциалдык теңдемелердин теориясы боюнча доктордук диссертациясын жактаган. Андан кийин Кыргыз Мамлекеттик Университетинин «Дифференциалдык теңдемелер» кафедрасына башчы болуп дайындалат. 1966-жылы илимий профессор наамын алат. Ошол эле жылы Кыргыз ССРнин Илимдер Академиясынын физика-математика институтунун директору болуп шайланат. 1969-жылы Кыргыз ССРнин Илимдер Академиясынын мүчө-корреспонденти болуп дайындалат. Өтө чоң жетишкендиктер М.И.Иманалиев жетектеп турган учурга дал келет. Институтта Орто Азия республикаларында биринчи болуп илимий ачылыштар жасалган.

1976—1979-жылдары М. И. Иманалиев Кыргыз Мамлекеттик Университетинин ректору болуп иштеген. Мында ал илимий педагогикалык кадрларды тандоого, студенттердин арасын билимдүү жаштар менен толтурууга көңүл бөлгөн.

1979-жылы Иманалиев М. И. Кыргыз ССРнин Илимдер Академиясынын чыныгы мүчөсү жана президенти болуп шайланат. Бул кызматта 1986-жылга чейин иштейт. 1981-жылы СССР Илимдер Академиясынын мүчө-корреспонденти болуп шайланат. 1984-жылдын июль айынан баштап бүгүнкү күнгө чейин Кыргыз Республикасынын Улуттук Илимдер Академиясында «Математика институнун» директору болуп иштейт.

Иманалиев Мырзабек Иманалиевич улуу окумуштуу-математик, 200 дөн ашык илимий иштин автору. Ал Кыргызстанда математика илиминин өнүгүшүнө белгилүү салым кошту. М. И. Иманалиевдин илимий ишмердигинин негизги сферасы болуп кадимки жана жекече туундудагы диференциалдык, интегралдык-диференциалдык теңдемелердин теориясы жана аларды табигый-техникалык илимдерде экономикада колдонуу эсептелет.

Академик М. И. Иманалиевдин негизги эмгектери интегро дифференциал теңдемелер теориясына арналган. Жогорку тартиптеги туундунун коэфициенти кичине параметр болгон интегро-дифференциалдык теңдемелердин ар түрдүү класстары үчүн Коши маселесинин, чет маселелердин чыгарылышын, мезгилдүү дээрлик жана чектелген чыгарылышы, асимптоталык катарларга ажыратуунун жаңы методун иштеп чыккан. Мындай чыгарылыштын калдык мүчөлөрүн асимптотикалык баалоонун эффективдүү методдорун берген. Кыргызстандагы бир топ техникалык, экономикалык маселелерди, механиканын эсептөө техникасы менен башкаруучу системалардын атайын маселелерин изилдеген. Бир нече жогорку сыйлыктардын ээси.

Эгерде биз асимптоталык теңдеме методун Иманалиевдин алгачкы отургузган чырпыгы деп эсептесек, бүгүн ал тамыры тээ тереңге кетип, улам бутактанып, улам бүчүрлөнүп отуруп, кучак жеткис зор чынарга айланды. 40 тан ашык физика-математика илимдеринин кандидатын чыгарууга жетекчилик кылды. 10 дан ашык физика-математика илимдеринин докторлорун чыгарууга консультанттык милдетти аткарды.

М. И. Иманалиев докторлук диссертацияларына консультант болгон физика-математика илиминин докторлору: Боталиев Азрет-Алий Ильясович, Каримов Салы, Панков Павел Сергеевич, Алымкулов Келдибай, Саадабаев Аскербек, Какишов Каныбек, Шамгунов Шамил Давлетович, Алексеенко Сергей Николаевич, Попов Владислав Владимирович, Өмүров Таалайбек Дардайылович.

V Бөлүм

ГЕОМЕТРИЯНЫН ӨНҮГҮҮ ТАРЫХЫ

5.1. АЛГАЧКЫ ГЕОМЕТРИЯЛЫК ТҮШҮНҮКТӨР

Алгачкы адамдар чоподон идиш жасашканда, аны алар оймо-чиймелер менен кооздошкон. Адегенде бул оймо-чиймелер өтө жөнөкөй болгон, барган сайын алар татаалдашкан жана геометриялык фигуралардан: ар кандай көп бурчтуктардан, тегеректерден ж.б. түзүлгөн оймо-чиймелерге айландырышкан.

Геометриялык фигураларды өтүкчү да, бычмачы да, уста да жана жер ченөөдө да пайдаланышкан.

Кол өнөрчүлүк татаалдаган сайын, билимдер өркүндөй берген. Курулуштарды курууда пирамидалардын көлөмү кандай боло тургандыгын, канча таш кетерин ж. б. ларды эсептешкен. Курулуш кулабасын үчүн тик бурч боюнча тик тургандай кылып курушкан. Мына ошентип геометриялык фигуралар жөнүндө илим пайда болгон.

Геометриянын алгачкы элементтери адегенде Вавилондо жана Египетте пайда болгон. Геометрия грек сөзүнөн алынган, «геос» — жер, «метрио» — ченейм дегенди түшүндүрөт.

Геометриянын Египетте пайда болгондугу жөнүндө байыркы грек тарыхчысы Геродет (биздин доорго чейин V кылым) мындай деп жазат: «Египет фараону ар бир Египеттик адамга бөлүктөп жер бөлүштүрүп берген жана ар бир бөлүк жерден туура келе тургандай налогдорду алган. Нил дарыясы тигил же бул айдоо аянттарын каптап кеткенде, ээлери падышага кайрылган. Падыша жер ченегичтерди жөнөтүп, айдоо аянттары канчага азайгандыгын ченетип, налогдорду ошого жараша кыскарткан. Ошолордун негизинде геометрия Египетте пайда болуп, андан Грецияга өткөн».

Ар кандай жалпак фигуралардын аянттарын жана нерселердин беттеринин аянттарын, көлөмдөрүн табуу маселелери Вавилондукдардын шынаа түрүндөгү жазууларында, Египеттиктердин папирустарында кездешет. Египеттик геометриянын жогорку жетишкендиги болуп, негизи квадрат болгон кесилген пирамиданын көлөмүн табышкандыгы эсептелинет, ал маселелер «Москва папирусунда» сакталган.

Ал эми Ахместин папирусунда тегеректин S аянты, жагы $\frac{8}{9}$ диаметр болгон квадраттын аянтына барабар экендиги чыгарылган.

$$S = \left(\frac{8}{9} \cdot 2R\right)^2 = \frac{256}{81} R^2.$$

Бул айлананын диаметрге болгон катышы (π) үчүн төмөндөгү маани алына тургандыгын түшүндүрөт:

$$\frac{256}{81} \approx 3{,}1605\ldots$$

Ошондой эле байыркы Кытай трактататтары «Чжоу-би», «Тогуз китептеги математика» (болжол менен биздин доорго чейин XII—XI кылым). «Чжоу-би» китебинде тик бурчтуу үч бурчтукка таандык сүйлөмдөр жана Пифагордун теоремасы берилген. Ушул эле эмгекте тегеректин аянтынын формуласы чыгарылган. Мында π ге 3 деген маани беришкен.

«Тогуз китептеги математика» трактатынын биринчи китеби «Талааны ченөө» деп аталат, Ал китепте айдоо аянттарын жана ар кандай геометриялык фигуралардын аянттарын эсептөөгө маселелер берилген. Төмөндөгү терминдерди пайдаланышат: трапеция — «кыйгач талаа», сектор — «ийри талаа», сегмент — «жаа түрүндөгү талаа». Радиус термини пайдаланылбайт, дайыма диаметр берилет.

Тегеректин аянтын табуу үчүн төрт эреже берилет:

1. Айлананын узундугун жарымын диаметрдин жарымына көбөйт;

$$\frac{2\ \pi\ R}{2}\cdot\frac{2\ R}{2}\ ,$$

2. Айлананын узундугун диаметрге көбөйт жана 4 кө бөл;

$$\frac{2\pi R\cdot 2R}{4}.$$

3. Диаметрди өзүнө-өзүн көбөйт, 4 кө бөл аны 3 жолу ал;

$$3\cdot\frac{2R\cdot 2R}{4}=3R^2 \text{ (демек } \pi=3).$$

4. Айлананын узундугун өзүнө-өзүн көбөйт, аны 12 ге бөл;

$$\frac{2\pi R\cdot 2\pi R}{12} \text{ (мында дагы } \pi=3)\ .$$

Бешинчи китебинде плотиналардын, каналдардын жана башка курулуштардын көлөмдөрүн эсептөөгө арналган маселелер берилген. Ал маселелерди чыгаруу үчүн, параллелепипеддин, пирамиданын, цилиндрдин, конустун ж.б. телолордун көлөмдөрү эсептелинген.

Биздин доорго чейин болжол менен VII—V кылымдарга таандык Индиялык диний-философиялык китептердеги маселелер практикалык мүнөздө берилген. Байыркы Индиялык геометрия ар кандай диний ырым-жырымдар, курмандыкка чалууну жогору коюу менен берилген. Ыйык китептер «вед» (билим) жана «сульва-сутра» (аркандар эрежеси) деп аталган. Ал китептерде түз сызыктардын жардамы менен тик бурчтуктардын, квадраттардын жана трапециялардын аянттарын эсептөөнүн көрсөтмөлөрү болгон.Ошондой эле Пифагордун теоремасынын практикалык колдонулушу жана үч бурчтуктардын окшоштугу берилген.

Байыркы Грецияда биздин доорго чейин VII кылымдан баштап, практикалык геометриядан теориялык геометрияга өтө баштайт. Бирок өзүнүн геометрия «жер ченөө» деген атын сактап калды. Бул изилдөөлөрдү байыркы грек математиги жана философу Фалес Милетский (биздин доорго чейин VII — VI кылым) түзгөн мектеби жүргүзгөн. Геометриянын бир нече башталгыч теоремалары Фалеске таандык деп эсептелинет. Мисалы: «Тең капталдуу үч бурчтуктун негизиндеги бурчтар барабар». «Вертикалдык бурчтар барабар». Ошондой эле бир жагы жана ага жанаша жаткан эки бурчу боюнча үч бурчтуктардын барабардыгы жөнүндөгү теорема жана башкалар.

Грецияда геометриянын андан ары өнүгүшү, көп ачылыштар Пифагор Самосскийге жана анын мектебине (биздин доорго чейин VI кылым) таандык. Мисалы: «Үч бурчтуктардын ички бурчтарынын суммасы 180° ка барабар». Квадраттык теңдеменин геометриялык жол менен чыгарылышы, Пифагордун теоремасы, ошондой «өлчөнүлбөй турган кесиндилердин бар экендиги» жөнүндөгү ачылыш иррационалдык сан түшүнүгүнө алып келди.

Байыркы Грецияда биздин доорго чейин VII—III кылымдарда геометрия боюнча көп маселелер топтолгон. Адамзат ушул убакытка чейин окуп үйрөнүп жаткан, циркуль жана сызгычтын жардамы менен түзүүгө мүмкүн болбогон атактуу үч маселе ошол жакта пайда болгон. Ал маселелер төмөндөгүлөр:

1. Берилген тегеректин аянтына барабар аянтты ээлеп турган квадратты куруу (тегеректин квадратурасы).
2. Каалаган бурчту барабар үч бөлүккө бөлүү.
3. Кубду эки эселентүү маселеси.

Бардык топтолгон геометриялык материалдарды жана геометриялык билимдерди Евклид системалуу илимге бириктирди. Мында ал Фалестин, Пифагордун, Гиппократтын, Евдокстун ж. б. лардын эмгектерине таянган. Ал биздин жыл эсебибизге чейин 300-жылдары чыккан «Башталмасында» геометрияны илим катары негиздеген. Бул китеп 465 аныктамалардан, аксиомалардан, теоремалардан турган. Көп кылымдар бою геометрия боюнча бирден бир окуу китеби болуп калган.

Азыркы орто мектептин планиметрия курсунун мазмуну негизинен Евклиддин окуу китебинен алынган.

XIX кылымдагы Н. И. Лобачевскийдин , К. Гausстун, В. Римандын жана башка окумуштуулардын ачылыштарынан кийин геометриядагы жаңы этап башталды.

5.2.ТЕГИЗДИКТЕГИ ФИГУРАЛАР

Фигуралардын физикалык касиеттерине көңүл бурбай, жалаң гана анын өлчөмүн, формасын жана кандайча жайланышканына көңүл буруу менен адамдар акырындап геометриялык фигуралар жана геометриялык телолор түшүнүгүнө келишти.

Геометриялык фигуралар биздин доорго чейинки «Москва папирусунан», «Ахместин папирусунан» жана байыркы Вавилондун шынаа түрүндөгү жазууларынан кездешет. Мында айрым жалпак фигуралардын аянттарын табуу ж. б. маселелердин чыгарылыштары берилген. Москва папирусунда фигуралар циркуль, сызгыч пайдаланылбай сызылган. Ал эми Ахместин папирусунда түз сызыктар, сызгычтын жардамы менен сызылган.

Жогорудагы тарыхый маселелерде төрт бурчтуктардын төмөндөгү түрлөрү берилет: квадрат, тик бурчтуктар, тең капталдуу жана тик бурчтуу трапеция-лар берилген. Ошондой эле Вавилондун шынаа түрүндөгү жазууларында тең капталдуу үч бурчтуктар жана тик бурчтуу үч бурчтуктар берилет. Тик бурчтуу үч бурчтуктарга Вавилондун геометриясында чоң көңүл бурулган.

Байыркы мезгилде эле геометриялык фигуралар үчүн кээ бир белгилерди киргизе башташкан. Байыркы грек математиги Герон (I кылым) төмөндөгү белгилерди пайдаланган: «үч бурчтук» — — ∇, тик бурчтук үчүн тик бурчтуктун кичирейтилген сүрөтүн пайдаланган. Байыркы грек математиги Папп (III кылым) айлананы — O деп, ал төрт бурчтуктарды кичинекей квадрат менен белгилеген. Бурчтарды ∠ — белгилөөнү, XVII кылымда Франциянын математиги П. Эригон киргизген. Ал ошондой эле төмөндөгү белгилерди пайдаланган: ⊥ — перпендикуляр; O — тегерек; ал эми айлананы айлананын бөлүгү менен белгилеген.

«Параллель» грек сөзүнөн алынган, «катар жүрүүчүлөр», «биринин жанына бири жүргүзүлгөндөр« (түз сызыктар) геометриялык термин катары Пифагордун мектебинде колдонула баштады. Евклиддин «Башталмасында«түз сызыктардын параллелдик белгиси берилет. Папп (III кылым) «параллелдүүлүктү» «=» белгиси менен белгилеген. Ушул белги көпкө чейин колдонулган. Качан Рекорд аркылуу барабардык белгиси катары «=» киргизилгенден кийин гана XVIII кылымдан баштап, «параллелдүүлүк» ‖ белгиси менен белгилене баштады.

Прокл айткан боюнча, «параллелограмм» терминин биринчи жолу Евклид киргизген. Параллелограммдын кээ бир касиеттери Пифагорчуларга да белгилүү болгон.

Евклиддин «Башталмасында» төмөндөгү теорема далилденет:

«Параллелограммдын карама-каршы жактары барабар жана карама-каршы бурчтары барабар, ал эми диагоналы аны экиге бөлөт». Бирок Евклид кесилишүүчү чекитте диагоналдардын экиге бөлүнө тургандыгы жөнүндө айтпайт. Параллелограммдар жөнүндөгү толук теория окуу китептеринде XVII кылымда гана берилген.

«Диагональ» термини грек сөздөрүнөн алынган, «диа» — «аркылуу», жана «гониос» — «бурч». Бурчтардын чокусу аркылуу өтүүчү кесинди. Бирок байыркы грек математиктери, Евклид дагы «диагональ» терминин ордуна «диаметр» терминин колдонгон. Себеби алар, тик бурчтукту тегеректе сырттан сызылган катары эсептешкен. XVIII кылымда гана «диагональ» термини жалпы пайдаланууга киргизилет.

«Ромб» термини дагы грек сөзүнөн алынган, «айлануучу тело» дегенди түшүндүрөт. Евклидде ромб бир гана жерде берилет, бирок анын касиеттери каралбайт.

«Квадрат» термини латын тилинен алынган, quadratum (quadrare — төрт бурчтуу кылуу).

«Трапеция» — грек сөзүнөн алынган, «трапедзион» — «тамак ичүүчү стол. Евклиддин «Башталмасында» параллелограмм эмес бардык төрт бурчтуктарды трапеция деп атайт. XVIII кылымдан баштап гана окуу китептерине азыркы аныктама киргизилет: «Эки жагы гана параллель болгон томпок төрт бурчтук трапеция деп аталат».

Трапециянын орто сызыгы негиздеринин суммасынын жарымына барабар экендиги байыркы Египетиктерге белгилүү болгон. Ал жөнүндө Ахместин папирусунда жана Жогорку Египеттеги Элфу храмында (б. з. ч. II кылым) чегилип жазылган. Ошондой эле байыркы Вавилондун жер ченегичтерине белгилүү болгон, бул жөнүндө Герон Александрийскийдин эмгектеринде берилген.

5.3. БАЙЫРКЫ АТАКТУУ ҮЧ МАСЕЛЕ

«Атактуу» үч маселелердин бардыгы циркуль жана сантиметрге бөлүнбөгөн сызгычты пайдалануу менен так чыгаруу талап кылынган. Жөнөкөй көрүнгөнү менен аларды чыгаруу үчүн адамдар 3—4 миң жылдар бою аракеттенип келишкен. Бул маселелер жөнүндө көп китептер жазылган.

XIX кылымда гана маселелердин циркуль жана сызгычтын жардамы менен түзүлбөй жана чыгарылбай тургандыгы далилденген.

1. **Тегеректин квадратурасы** (Тегеректи квадратка келтирүү).

Тегеректин квадратурасы жөнүндөгү маселелерди биздин доорго чейинки 2000 жылдардагы байыркы Египеттин папирустарынан жана Вавилондун чопого жазылган жазууларынан кездештирүүгө болот. Тегеректин квадратурасы жөнүндөгү маселе биздин доорго чейинки V кылымдагы гректердин эмгектеринде биринчи жолу кеңири каралат. Плутарх өзүнүн «Куугунтук жөнүндөгү» чыгармасында, философ жана астроном Анаксагордун (500—428 жылдар) түрмөдө жатып, тегеректин квадратурасы жөнүндөгү маселесин ойлонуу менен кайгы-капасын унуткан, деп жазган. Биздин доорго чейин 414—жылы атактуу грек акыны Аритосфан «Куштар» деген комедиясында тегеректин квадратурасы жөнүндө тамашалуу ырын жазган. Ырдын жазылганы менен ошол убакта тегеректин квадратурасы жөнүндөгү маселе атактуу экендигин билгизет. Бул маселени чыгарууга Аристотель, Гиппократ Хиосский ж. б. ларда аракет кылышкан.

Берилиши таза геометриялык маселе болуп, чыгарылышы π саны менен байланышкан алгебралык мүнөздөгү маселеге айланды жана математикада жаңы түшүнүктөрдүн, идеялардын пайда болушуна түрткү берди.

Берилген тегеректин радиусунун узундугу r ал эми квадраттын жагы a болсун. Анда:

$$S_{\text{тегерек}} = \pi r^2, \quad S_{\text{кв}} = a^2.$$

$$a^2 = \pi r^2, \quad a = r\sqrt{\pi}.$$

Мында квадраттын жагын түзүү π санына байланыштуу экендиги көрүнүп турат. $a = r\sqrt{\pi}$ кесиндисин циркулдун жана сызгычтын жардамы менен түзүүгө болбойт.

2. **Бурчту барабар үч бөлүккө бөлүү** («бурчтун трисекциясы» — латын тилинен алынган tria — үч, sectio — кесип салуу). Башкача айтканда каалагандай бурчту циркулдун жана сызгычтын жардамы менен барабар үч бөлүккө бөлүү.

Бул маселенин айрым учурларын Пифагор жана анын окуучулары чыгарышкан. Алар тең жактуу үч бурчтуктун бурчтарынын ар бири 60 ка барабар экендигине таянышып, тик бурчту үч барабар бөлүккө бөлүүнү карашкан.

XIX кылымда циркуль жана сызгычтын жардамы менен барабар үч бөлүккө бөлүүгө мүмкүн болбогон бурчтун бар экендиги далилденди.

3. Кубду эки эселентүү маселеси.

Кубду эки эселентүү маселеси ошондой эле «Делос маселеси» деп аталып, төмөндөгү легенда айтылат:

«Делос аралында (Эгей деңизи) кара тумоо оорусу каптайт. Анда аралда жашаган адамдар кудайдын элчисинен, кара тумоодон кутулуунун жолун сурашат. Ал төмөндөгүдөй жооп берет: «Аполлондун храмынын садага жасоочу жайын эки эсе чоңойткула». Адамдар башталышында оңой эле маселе деп ойлошкону менен, иш жүзүндө андай эмес экендигин көрүштү. Себеби садага кылуучу жай куб формасында эле. Алар, кубдун жагын 2 эсе чоңойтуп койгондо, аны 8 эсе чоңойтконун түшүнүшкөн жок. Кара тумоо күч алганда кайра дагы кудайдын элчисине кайрылышат. Ал, — геометрияны жакшыраак үйрөнгүлө, деп кеңеш берген».

Окумуштуулар маселени циркуль жана сызгычтын жардамы менен түзүүгө аракеттенишкен, бирок XIX кылымда бул маселенин циркуль жана сызгычтын жардамы менен чечилбей тургандыгы далиденген. Ал $x^3 - 2 = 0$ теңдемесин чыгарууга келтирилген. Бул теңдеменин рационалдык чыгарылышы жок. Демек циркуль жана сызгычтын жардамы менен түзүүгө болбойт.

5.4. ПИФАГОРДУН ТЕОРЕМАСЫ

Прокл (410—485) өзүнүн Евклиддин «Башталмасы» жөнүндө жазганда, мындай дейт: «Тик бурчтуу үч бурчтуктун гипотенузасынын квадраты, катеттеринин квадраттарынын суммасына барабар сүйлөмү, байыркы легендалардын айтылышына караганда, Пифагор жана анын окуучуларына тиешелүү. Бул ачылыштын урматына өгүздөрдү курмандыкка чалган».

Пифагордун теоремасы илимдин, техниканын жана практикалык турмуштун ар кандай областтарында кеңири пайдаланылат.

Бул жөнүндө, кээ бир легендаларда, ачылышынын урматына жүз өгүз курмандыкка чалынган деп айтылат. Ал жөнүндө далай дастандар жана ырлар жазылган.

Азыркы кездеги изилдөөлөр боюнча Пифагордун теоремасы, Пифагорго чейин 1200 жыл мурдагы Вавилондук тексттерде кездеше тургандыгы айтылат.

Байыркы Египеттиктер биздин доорго чейин 2000-жылдары жактары 3, 4, жана 5 болгон үч бурчтук тик болорун билишкен. Балким ушул катыштарды, ар курулуштарды курууда пайдаланган болуу керек. Ал эми Кытайда, Пифагорго чейин 500 жыл мурда белгилүү болгон. Бул теорема боюнча Индиядагы биздин доорго чейинки 2000—1500 жыл мурдагы «Вед» деп аталган китептеринде төмөндөгү сүйлөмдөр берилген.

1) Тик бурчтуктун диагоналынын квадраты анын кичине жана чоң жагынын квадраттарынын суммасына барабар.

2) Квадраттын диагоналы аркылуу түзүлгөн квадрат, квадраттын өзүнөн эки эсе чоң.

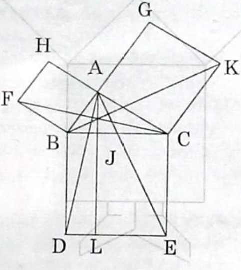
Бул китепте бир фигуранын ага барабар чондукта болгон экинчи фигура менен алмаштыруу үчүн жана бул фигураларды кошуу, бөлүү үчүн кеңири жазылган эрежелер болгон. Мында негизинен жактары бүтүн сандар менен белгиленген тик бурчтуу үч бурчтуктарды пайдаланышат. Төмөнкү түрдөгү тик бурчтуу үч бурчтуктар берилет:

1) 3, 4, 5 деген сандарды бирдей санга көбөйтүүдөн алынган, жактары 3, 4, 5 жана ага окшош;

2) жактары 5, 12, 13 жана ага окшоштор;

1) жактары 8, 15, 17 жана 12, 35, 37.

Көп кылымдардын ортосунда Пифагордун теоремасынын ар кандай далилдөөлөрү берилди. Азыркы учурда 150 далилдөөсү бар. Мисалы, Евклиддин «Башталмадагы» далилдөөсүн карайлы (27-сүрөт).



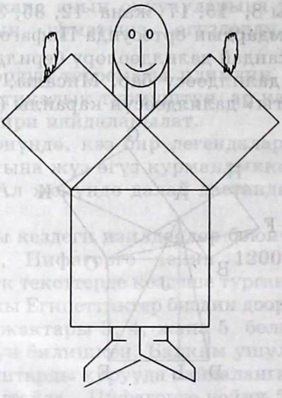
27-сүрөт.

Евклид таза геометриялык түрдө далилдейт. Берилген тик бурчтуу үч бурчтуктун жактарына тиешелүү түрдө квадраттарды түзөт. Андан катеттер аркылуу түзүлгөн квадраттардын аянттарынын суммасы, гипотенуза аркылуу түзүлгөн квадраттын аянтына барабар экендиги далилденет.

$$BC^2=AB^2+AC^2.$$

Пифагордун теоремасы орто кылымда, окуучулар үчүн абдан татаал болуп эсептелинген. Алар Пифагордун теоремасына чоң маани берген. Тамаша түрүндө Евклиддин теореманы далилдөөдөгү чиймесине ылайык каррикатураны тартып, астына төмөндөгү ырды жазып коюшкан: Пифагордук дамбалдар бардык жагы барабар.

Пифагордун теоремасына окуучулардын тарткан сүрөтү.



28-сүрөт.

5.5. ЕВКЛИДДИН ГЕОМЕТРИЯСЫ

Евклид өзүнөн мурда жашап өткөн окумуштуулардын эмгектерине таянып, геометриялык билимдерди системалуу илимге бириктирип, өзүнүн атактуу «Башталма» китебин жазган. Ал көп кылымдар бою окуу китеби болуп саналган. Евклид болжол менен биздин доорго чейин III кылымда Птолемей падышанын убагында жашаган. Жогоруда айтылгандай бул эмгек, 465 сүйлөмдөн (аныктамалардан, аксиомалардан, постулаттардан, теоремалардан, түзүүгө берилген маселелерден) турган. Алар белгилүү тартипте берилип аныктама, аксиома жана постулаттардан башкасынын баары далилденген. «Башталма» 13 китептен турган.

Аныктоолор, постулаттар жана аксиомалар системасы анын геометриясынын негизи болуп саналат.

1-китебинде үч бурчтуктар, алардын касиеттери, параллель жана перпендикуляр түз сызыктар, алардын өз ара жайланыштары, касиеттери, параллелограммдар жана анын түрлөрү, көп бурчтуктардын аянттары, Пифагордун теоремасы берилген.

2-китебинде геометриялык алгебра каралат.

3-китебинде айлана жана тегерек каралган.

4-китебинде айланага ичтен жана сырттан сызылган көп бурчтуктар, туура көп бурчтуктарды түзүү жөнүндө айтылат.

5-китебинде пропорциялаштык теориясы жана иррационалдык сандар берилген.

6-китебинде фигуралардын окшоштугу каралат.

7—9-китептеринде арифметика каралат. Кээ бир түшүнүктөр геометриялык формада берилет.

10-китебинде ченелүүчү жана ченелбөөчү чоңдуктар каралат.

11—13-китептеринде стереометрия каралган.

«Башталма» жыйнагында мектеп курсунун материалдары дээрлик толук берилген. Андан кийинки бардык авторлор кандайдыр бир деңгээлде Евклидден үлгү алышкан.

Евклиддин эмгегинин айрым бөлүктөрүнө карата сын көз караште болушкан. Негизинен бул сын Евклиддин «Башталмасындагы» V постулатка тиешелүү.

«Башталмада» беш постулат (латын тилинен алынган — «талап кылуу») берилген. Алар төмөндөгүчө берилет:

I. Ар бир чекиттен каалагандай экинчи чекитке чейин түз сызык жүргүзүүгө мүмкүн.

II. Ар бир чектелген түз сызыкты чексиз созууга мүмкүн.

III. Каалагандай чекитти борбор кылып, каалагандай радиус менен айлана сызууга мүмкүн.

IV. Бардык тик бурчтар конгруэнттүү болуп эсептелет.

V. Эгерде эки түз сызык үчүнчү түз сызык менен кесилишкенде бир жактуу ички эки бурчту түзүп, ал бурчтардын суммасы эки тик бурчтан кичине болсо, анда эки түз сызыкты созсок, алар дайыма суммасы эки тик бурчтан кичине болгон бурчтар жагынан кесилишет.

V постулаттын негизинде параллель түз сызыктардын теориясы пайда болгон. Көп окумуштуулар V постулатты ачык эмес аны далилдөө керек деп, бир топ далилдөөлөрдү беришкен. Бирок, далилдөө аракеттери XIX аягына чейин ийгиликсиз болгон. Англиялык окумуштуу Джон Плейфер 1795-жылы V постулатка эквиваленттүү болгон параллелдик аксиомасын түзгөн: «Түз сызыкта жатпаган чекит аркылуу ал түз сызыкка параллель болгон бир гана түз сызык өтөт». Венгер математиги Янош Бояи (1802—1860), орус математиги Н. И. Лобачевский (1792—1856), немец математиги Карл Гаусс (1777—1855) бири-биринен көз карандысыз жогорудагы аксиоманы карама-каршы аксиома менен алмаштырууну сунуш кылышты. Мунун өзү жаңы геометрияны түзүүгө мүмкүнчүлүк берди.

5.6. СТЕРЕОМЕТРИЯ ЖӨНҮНДӨ АЛГАЧКЫ ТҮШҮНҮКТӘР

Вавилондун жана байыркы Египеттин архитектураларында куб, параллелепипед жана призмалар кезигет. Вавилондуктар жана байыркы Египеттиктердин геометриясындагы эң негизги маселе бул ар кандай мейкиндиктеги фигуралардын көлөмдөрүн табуу болгон. Бул маселелер тамдарды, храмдарды жана башка ар кандай курулуштарды куруу үчүн пайдаланышкан.

Геометриянын мейкиндиктеги ар кандай фигуралардын касиеттерин окуп үйрөнүүчү бөлүгү байыркы мезгилден бери эле «*стереометрия*» деп, аталып келе•жатат. Бул грек сөзүнөн алынган, «*стереос*» —мейкиндиктик, «*метрео*» — ченейм. Бул термин биздин доорго чейин IV кылымдагы Аристотелдин эмгектеринде кездешет.

Жогоруда айтылгандай Евклиддин 11—13-китептеринде стереометрия каралган. Евклид 11-китебинде призмага төмөндөгүдөй аныктама берет: «Призма бул тегиздиктердин ортосунда жайланышкан телолук (мейкиндиктик) фигура, анын эки карама-каршысы барабар, калгандары параллелограмм».

«Призма» термини грек тилинен алынган сөзмөсөз которгондо «араланып алынган тело» дегенди түшүндүрөт.

«Параллелепипеддүү тело» термини биринчи жолу Евклидден кезигет, кыргызчага которгондо «параллель тегиздиктүү тело».

Дандарды төгүүчү кампаларды, куб призма жана цилиндрлердин көлөмүн байыркы Египетиктер, Вавилондуктар, Кытайлыктар жана Индияда негизин бийиктигине көбөйтүү менен табышкан.

Биздин доорго чейин, V—IV кылымда Демокрит жана Евдокс Книдский көлөмдөр теориясын иштеп чыгышкан.

Евклид «көлөм» терминининин ордуна «куб» (кубос) терминин пайдаланат. «Куб» термини ошондой эле кубдун көлөмүн дагы билгизкен. XI китебинде көлөмдөрдү салыштырууга төмөндөгү мазмундагы теоремаларды берген.

1. Бийиктиктери бирдей жана негиздери барабар чоңдукта болгон параллелепипеддер бирдей чоңдукта болушат.

2. Бийиктиктери барабар болгон эки параллелепипеддин көлөмдөрүнүн катышы алардын тиешелүү негиздеринин аянттарынын катышына барабар.

3. Бирдей чондуктагы параллелепипеддердин негиздеринин аянты бийиктиктерине тескери пропоциялаш.

«Пирамида» термининин пайда болгону жөнүндө ар кандай ойлорун айтышат. Орто кылымдагы окумуштуулар «пирамида» гректердин «пир» (от) деген сөзүнөн алынган дешет. Жалындын формасы пирамиданы элестетет дешкен. Ошондуктан XVI кылымдагы кээ бир окуу китептеринде пирамиданы «от формасындагы тело» деп аташкан. Ахместин папирусунда «пирамус» деген термин кездешет. Ал туура пирамиданын каптал кырын «пирамус» деп атаган. Кээ бир окумуштуулар гректер пирамида деген сөздү Египетиктердин «пирамус» деген сөзүнөн алынган дешет.

Байыркы Египетте фараондордун күмбөздөрү пирамида формасында болгон. Биздин доорго чейин III кылымда Египеттиктер таштардан тепкичтелген пирамидаларды жасашкан. Бара-бара пирамидалар геометриялык туура формада курула баштаган. Мисалы Хеопстин пирамидасынын бийиктиги 147 м ге жеткен. Пирамиданын ичинде маркумдардын сөөктөрү коюлган жана коридорлордон турган.

Биздин доорго чейин V кылымда Демокрит пирамиданын көлөмү, аны менен барабар бийиктиктеги жана бирдей негиздеги призманын көлөмүнүн үчтөн бирине барабар экендигин аныктаган. Бул теореманын толук далилдөөсүн биздин доорго чейин IV кылымда Евдокс Книдский берген.

Евклид «Башталмасында», бирдей чондуктагы пирамидалардын негиздеринин аянттарынын катышы тиешелүү бийиктиктеринин катышына тескери пропорциялаш экендигин далилдейт.

«Москва папирусунда», «Кесилген пирамиданы эсептөө» деп, аталган маселе берилген. Мында кесилген пирамиданын көлөмүн табууга бир маселе берилип туура эсептелген. Вавилондуктардын чопо кирпичтериндеги жазууларында пирамиданын көлөмүн табууга көп маселелер чыгарылган, анын ичинде кесилген пирамданын көлөмүн табууга маселелер көп болгон.

Азыркы кезде пайдаланылган кесилген пирамиданын көлөмүнүн формуласын биринчи жолу 1220-жылы Леонардо Фибоначчинин «Геометриянын практикасы» китебинде сөз түрүндө берилет.

$$V = \tfrac{1}{3}h(b + b' + \sqrt{bb'}).$$

Мында h, b, b' тиешелүү түрдө бийиктигин, жогорку жана төмөнкү негиздеринин аянттарын түшүндүрөт.

5.7. ТУУРА КӨП ГРАНДЫКТАР

Туура көп грандыктар бул бардык грандары конгруэнттүү туура көп бурчтуктар жана бардык көп грандуу бурчтары конгруэнттүү болгон томпок көп грандык. Туура көп грандыкты Платондун телолору деп да аташат. Себеби Платон дүйнөнүн идеалдуу сүрөттөлүшүн: тетраэдр— от, куб — жер, икосаэдр — суу, октаэдр — аба, додакаэдр — бүткүл дүйнө деп символдоштурган.

Туура көп грандыктар жөнүндө Евклиддин «Башталмасынын» XIII китебинде берилет.

Жактарынын саны бирдей туура көп бурчтуктар болгон жана ар бир чокусунан бирдей сандагы кырлар чыккан томпок көп грандык туура көп грандык деп аталат.

Евклид туура көп грандыктардын бар экендигин айтып андан кийин аларга кандайча ичтен сфера сызууну көрсөтөт.

1) Тетраэдр, грек сөзүнөн алынган «тетра» — «төрт» жана «*(h)e dra*» — «граны», 4 граны, 4 чокусу , 6 кыры бар.

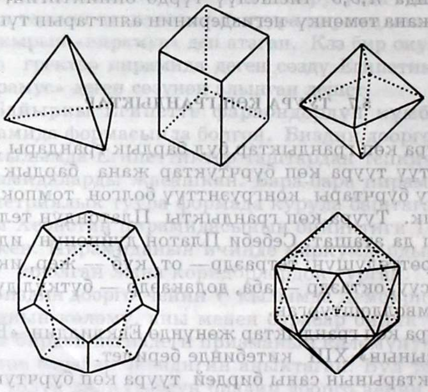
2) Гексаэдр, «гекса» — «алты», 6 граны, 8 чокусу, 12 кыры бар.

3) Октаэдр, «окто» — «сегиз», 8 граны, 6 чокусу, 12 кыры бар.

4) Додакаэдр, «додека» — «он эки». 12 граны, 20 чокусу, 30 кыры бар.

5) Икосаэдр, «эйкоси» — «жыйырма», 20 граны, 12 чокусу, 30 кыры бар.

Евклид ошондой эле бул 5 туура грандыктан башка, туура көп грандыктын жок экендигин айтат (29-сүрөт).



29-сүрөт. Туура көп грандыктар.

Туура 5 көп грандыктардын жалгыздыгынын далилдөөсүн элементардык геометрияга биринчи жолу А. Лежандр 1794-жылы киргизет.

Француз математиги жана механиги Л. Пуансо (1777—1859) туура томпок эмес эки көп грандыктын бар экендигин ачат. 1812-жылы О. Коши башка туура жылдыздуу көп грандыктардын жок экендигин далилдейт.

Туура көп грандыктар жана көп грандыктар үчүн Декарт-Эйлер формуласы туура келет, Ч+Г—К=2. Мында Ч— чокуларынын саны, Г — грандарынын саны, К — кырларынын саны.

5.8. АЙЛАНУУ ТЕЛОЛОРУ

Евклиддин «Башталмасынын» XI китебинде төмөндөгү аныктама берилет. «Эгерде өзүнүн бир катетинин айланасында айланган тик бурчтуу үч бурчтук кайра өзүнүн баштапкы абалына келсе, анда пайда болгон фигура конус деп аталат».

Тик бурчтуу үч бурчтук айланган кыймылсыз катети, конустун огу деп аталат, айлануучу катет менен чийилген тегерек конустун негизи болот.

Латын сөзү «conus» грек тилинин«конос» (тыгын, соснанын тобурчагы) деген сөзүнөн алынган.

Евклид жалаң гана тик конустарды б.а. конустун огу негизине перпендикуляр болгон гана учурду карайт. Ал эми Аполлоний тик жана жантык конустарды айырмалап аныктайт.

Евклиддин «Башталмасынын» XII китебинде төмөндөгү теоремалар берилген:

1) Конустун көлөмү, аны менен негизи бирдей чоңдукта жана бийиктиги барабар болгон цилиндрдин көлөмүнүн үчтөн бир бөлүгүнө барабар.

Бул теореманын далилдөөсү Евдокс Книдскийге тиешелүү.

2) Негиздери бирдей болгон конустардын көлөм-

дөрүнүн катышы тиешелүү бийиктиктеринин катышына барабар.

3) Эгерде эки конус бирдей чондукта болсо анда, алардын негиздеринин катышы тиешелүү бийиктиктеринин катышына тескери пропорциялаш же тескерисинче.

Конустун көлөмүн эсептөөнүн формуласын Герон Александрийский берген: «Конустун көлөмү анын негизинин аянтын бийиктигине болгон көбөйтүндүсүнүн үчтөн бирине барабар».

Евклид «Башталмасынын» XI китебинде цилиндрди, тик бурчтукту бир жагынын айланасында айландыруудан алынган фигура деп, аныктама берет жана жалаң гана тик цилиндрлерди карайт.

Евклид ушул эле китебинде шарды кыймылсыз диаметринин айланасында жарым тегеректи айландыруудан алынат деп айтат.

«Шар» жана «сфера» сөздөрү гректердин «сфайра» — «топ» деген бир сөзүнөн чыккан. «Сф» деген тамгалардын «ш» тамгасына өтүшүнөн «шар» деген сөз келип чыккан.

Шар деп сфера менен чектелген телону кабыл алышкан. Берилген чекиттен бирдей аралыкта жатуучу мейкиндиктин бардык чекиттеринин көптүгү **сфера** деп аталат.

Байыркы мезгилде сфераны абдан кызыгып изилдешкен.

Шардын көлөмү жана сферанын бетинин аянттары жөнүндөгү формулалардын натыйжалары Архимеддин эң улуу ачылыштарынын бири болуп саналат. Анын «Шарлар жана цилиндрлер жөнүндө» деген китебинде төмөндөгү теоремалар берилет.

1. Сферанын бетинин аянты анын эң чоң тегерегинин аянтын төрт эселегенге барабар, б.а.

$$S = 4\pi R^2.$$

2. Шардын көлөмү, негизи шардын чоң тегереги ал эми бийиктиги анын радиусуна барабар болгон

конустун көлөмүн төрт эселегенге барабар, б. а.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

3. Цилиндрдин көлөмү анын ичтен сызылган шардын көлөмүнөн бир жарым эсе чоң.

4. Цилиндрдин толук бетинин аянты анын ичине сызылган сферанын бетинин аянтынын $\frac{3}{2}$ не барабар.

Цилиндрдин ичине сызылган шардын сүрөтү улуу ачылыштын символу катары Архимеддин мүрзөсүнүн үстүнө ташка чегилип коюлган.

5.9. ГЕОМЕТРИЯНЫН АНДАН АРЫ ӨНҮГҮШҮ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ ЖАНА АНЫН ГЕОМЕТРИЯСЫ

Эки миңден ашык убакыт бою эң көрүнүктүү математиктер Евклиддин V постулатын далилдөөгө жасаган аракеттери XIX кылымдын башына чейин созулду. Жогорку пункттарда айтылгандай Н. И. Лобачевский, К. Гаусс, Янош Бояи бири-биринен көз карандысыз Евклиддин V постулатына эквиваленттүү болгон «Берилген түз сызыктан тышкары жаткан чекит аркылуу ага параллель болгон бир гана түз сызык жүргүзүүгө болот» деген аксиоманы ага карама-каршы болгон аксиома менен алмаштырууну сунуш кылышты. Казан университетинини профессору Н. И. Лобачевский бир кыйла чечкиндүү кадам жүргүзүп, биринчи болуп өзүнүн далилдөөсү жөнүндөгү докладды 1826-жылы 23-февралда (эски стил боюнча 11-февралда) университеттин физика-математика факультетинин заседаниесинде жасаган. Бул дата Евклиддик эмес геометриянын ачылыш датасы деп эсептелинет. «Геометриянын башталышы жөнүндөгү» деген эмгегинде 1829-жылы жарыяланган.

Николай Иванович Лобачевский 1792-жылы 1-декабрда (жаңы стиль боюнча) Нижний Новгород шаарында туулган. Анын атасы жер ченөө конторасынын кызматчысы болгон, 1856-жылы каза болот.

Энеси Прасковья Александровна үч жаш уулу менен каражатсыз калып, уулдарын Александр, Николай жана Алексейди мамлекеттин эсебинен окута турган Казандагы гимназияга киргизет.

1805-жылы Казанда университет ачылып, 1807-жылы Н. И. Лобачейский ага студент болуп кабыл алынат. Университетин физика-математика факультетинде жетекчиси С. Я. Румовский, математик — педагог М. Ф. Бартельс (Гаусстун мугалими) жана астроном Н. И. Литтров сыяктуу күчтүү мугалимдер иштегендиктен, сабактар керектүү деңгээлде жакшы өткөрүлгөн. Жаш студент Лобачевский эки-үч жылдын ичинде эле так илимдерден эң чоң жетишкендиктерге ээ болду. Анын өзүнүн жөндөмдүүлүгү, учурдагы проблемаларды туура түшүнгөндүгү менен мугалимдерди таң калтырган. М. Бартельс, Лобачевскийдин жөндөмдүүлүгүн байкап калып, аны менен өз алдынча жекече иштей баштайт. Александр I дин падышачылыгынын экинчи жарымында студенттердин тартибине чоң көңүл бурула баштады, Н. И. Лобачевскийди кудайга ишенбөөчүлүк белгилери бар деп күнөөлөшүп, университеттен чыгаруу жөнүндө иш козголгон. Профессорлордун кийлигишкендиги үчүн, иш токтолгон.

1811-жылы Н. И. Лобачевский университетти ийгиликтүү аяктап, кайра эле ошол университетке мугалим болуп калтырылат. Ал тез эле таланты жана чымырканган эмгеги менен илимий-педагогикалык иштер боюнча чоң ийгиликтерге жетти. 1816-жылы профессор катары элементардык математика, дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөр боюнча атайын курстарды окутат. Кийинчирээк ал математикадан башка да физиканы, механиканы жана астрономияны окуткан.

1827-жылы Казань университетинин совети Н. И. Лобачевскийди университеттин ректору кылып шайлаган. Университетин студенттери жана профессорлору аны абдан урматташкан. Ал 20 жылга жакын убакыт университеттин шайлануучу ректору болгон. Казань университетинин ректору жана профессору Н. И. Лобачевский студенттерди илимди сүйүүгө жана патриоттук сезимдерге тарбиялоого чоң көңүл бурган.

Мектеп жөнүндө камкордук көрүп, Лобачевский алгебра жана геометрия окуу китептерин жазуу менен мектептеги мугалимдердин сабагына катышып методикалык көрсөтмөлөрдү берген.

Ал өмүрүнүн аягына чейин философиялык жана саясий прогрессивдүү көз караштa болуп идеалисттик агымдарды катуу сынга алган.

Н. И. Лобачевскийдин геометриясында: «Түз сызыкта жатпаган чекит аркылуу ушул түз сызык жана чекит аркылуу аныкталган тегиздикте берилген түз сызык менен кесилишип өтпөгөн чексиз сандагы түз сызыктарды жүргүзүүгө мүмкүн» деп берилет. Бул Лобачевскийдин аксиомасы деп аталат. Лобачевскийдин аксиомасы боюнча берилген чекит аркылуу берилген түз сызык менен кесилишпей турган жок дегенде эки түз сызык жүргүзүүгө болот деп эсептеп, Евклиддин калган аксиомаларын ошол бойдон кабыл алып, эч кандай карама-каршылыкка учурабаган көп теоремаларды далилдеген.

Н. И. Лобачевскийдин бул ачылышы геометриядагы жана философиядагы бүтүндөй төңкөрүш болду. Анын чоң ачылышын жогору баалашып, геометриянын Коперниги же Колумбу деп аташкан, анткени, геометрия жагынан бул ачылыш Коперник астрономияда жана Колумб географияда жасаган сыяктуу көңтөрүш болгон. Кылымдар бою өкүм сүрүп келген Евклиддин геометриясынын окумуштуулардын аң-сезимине сиңип калышы, жаңы геометриянын кабыл алууга кыйла тоскоолдук кылган. Н. И. Лобачевский илимдин өсүп өнүгүү процессинде аксиомаларды текшерүүгө, тажрыйбалардын негизинде тактоого жана өзгөртүүгө мүмкүн экендигин көрсөттү. Н. И. Лобачевский «Пангеометрия» деген эмгегинде өзүнүн геометриясын жалпы геометрия деп, Евклиддин геометриясын анын айрым учуру деп атаган.

Н. И. Лобачевскийдин геометриясында «үч бурчтуктардын ички бурчтарынын суммасы эки тик бурчтуктан кичине жана алардын жактарынын узундугуна жараша болот», «томпок төрт бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы 360 тан кичине» деп берилет. Бул геометрияда окшош фигуралар болбойт жана тик бурчтук деген жок.

Бирок өзүнүн илимий идеяларын түшүндүрүүгө жана тааныштырууга жетишүүгө жасаган бардык аракеттери жемишсиз болуп чыгышы Н. И. Лобачевскийдин ден-соолугуна таасир берген. Өзүнүн өмүрүнүн акырында көзү көрбөй калган. Акыркы илимий эмгегин — жаңы геометриянын негиздерин өзү айтып берип жаздырган. Ал 1856-жылы 12-февралда каза болгон.

Каза болгондон кийин Н. И. Лобачевскийдин эмгектери таанылып, анын ишин улантуучулар идеяларын иш жүзүнө ашыруу мүмкүнчүлүгүн аныкташты. Анын эмгектери бардык маданиятка жетишкен өлкөлөрдүн тилине которула баштады. Риман, Клейн, Гильберт жана башка окумуштуулардын эмгегинде Н. И. Лобачевскийдин эмгектери өнүгө баштады.

Н. И. Лобачевскийдин идеялары астрономиядагы жана физикадагы бардык жаңы теориялардын, бүткүл теориялык табият таануунун негизи болуп калды. «Канчалык абстрактуу болбосун, чындык дүйнөнүн көрүнүштөрүнө колдонууга жарамдуу болбой турган математиканын бир дагы тармагы жок», деген анын сөзү илимде аныкталды.

1893-жылы туулган күнүнүн 100 жылдыгына Н. И. Лобачевскийге Казанда эстелик коюлган.

VI Бөлүм

ТРИГОНОМЕТРИЯНЫН ӨНҮГҮҮ ТАРЫХЫ

6.1. ТРИГОНОМЕТРИЯНЫН ПАЙДА БОЛУШУ

Тригонометрия грек сөзүнөн алынган, «тригонон» — «үч бурчтук» ал эми «метрео» — «ченеймин» дегенди түшүндүрөт. Бул термин биринчи жолу 1595-жылы, тригонометрия окуу китебинин жана тригонометриялык таблицалардын автору, немец математиги Варфоломей Питиск тарабынан киргизилген.

Тригонометриянын пайда болушу, астрономия жана география илиминдеринин өнүгүшү менен тыгыз байланышта.

Астрономия — байыркы илимдердин бири, ал жыл мезгилдеринин өзгөрүшүн, убакытты билүү муктаждыктарынан келип чыккан. Күндүз күн, түндө ай, жылдыздар кылымдар бою адамдарга мезгилди жана убакытты билүүгө кызмат кылган.

Вавилондуктар астрономия илимине негиз салуучулардан болгон. Жуманын жети күндөн турушу, тегеректи 360 градуска бөлүү, бир саатты 60 минутага, минутаны 60 секундага, секунданы 60 терцияга бөлүү ошолордон башталган. Келечекти жылдыздар боюнча аныктоо жөнүндөгү астрология илими дагы ошолордон пайда болгон. Байыркы мезгилде астрономия Вавилондо, Египетте, Кытайда, Индияда ж.б. өлкөлөрдө пайда болуу менен өнүгө баштаган. Астрономиялык байкоолорду жүргүзүүдө асмандагы жылдыздардын жайланышын, Жерден кандайдыр бир планетага чейинки аралыкты билүүнү жана бурчтарды табуунун зарылдыгы келип чыкты. Окумуштуулар эки чокусу Жерде жайланышкан, ал эми үчүнчү чокусу планета же жылдыздарда жайланышкан үч бурчтуктардын жактарын жана бурчтарын табуунун жалпы чыгарылыштарын таба башташты. Мындай өз ара байланыштарын жана катыштарын үч бурчтуктардын ар кандай түрлөрүн жана алардын касиеттерин үйрөнүү керек болгон. Бул суроонун үстүндө тригонометрия иш жүргүзөт.

Тригонометриянын кээ бир маселелери Байыркы Вавилондун ж.б. байыркы элдердин кол жазмаларынан табылган.

Байыркы грек окумуштуулары биринчилерден болуп тик бурчтуу үч бурчтуктардын үстүнөн ар кандай маселелерди иштей баштащкан. Башкача айтканда тик бурчтуу үч бурчтуктардын үч элементи берилсе табууну, мында жок дегенде бир жагынын берилиши каралган. Бул маселелерди чыгаруу үчүн бирдей радиуска ээ болгон, ар кандай борбордук бурчтарга туура келүүчү хордалардын узундугун табуунун таблицасын түзүшкөн. Биринчи жолку хордалардын таблицасын астроном-математик Никеядан чыккан Гиппарх (биздин доорго чейин II кылым) түзгөн. Гиппарх математикалык географиянын негиздөөчүсү болгон, андан тышкары жылдыздардын каталогун түзгөн, Жерден, Айга чейинки аралыкты тапкан. Бирок анын эмгектери бизге чейин жетпей калган. Анын эмгектеринин көбү, байыркы грек астроному Клавдия Птолемейдин (II кылым) «Альмагест» деген илимий эмгегинде берилген. «Альмагест» грек сөзүнөн алынган, «Мэгистэ» — «улуу, бийик» дегенди билдирет, бул Птоломейдин «Астрономиянын улуу математикалык түзүлүшү» илимий жыйнагынын сөзүнөн алынган. «Альмагест» жыйнагында астрономия жана тригонометриянын элементтери, хордалардын таблицасы берилген. Птолемейдин таблицасы 60 тык эсептөө системасында 0 тан 180°ка чейин жарым градус аралыкта түзүлгөн, бул жарым хорданын мааниси синустардын таблицасынын ролун аткарган, себеби жарым хорда тиешелүү борбордук бурчтун синусун берет.

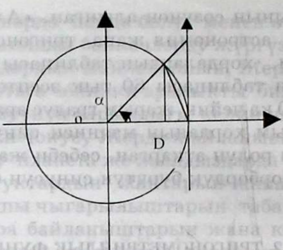
6.2. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК ФУНКЦИЯЛАР

Синус жана косинус терминдери IV—V кылымдардагы Индиялык астрономиялык кол жазмаларда кездеше баштайт. Жарым хорданы синус менен алмаштырып, алгачкы мезгилде синусту «ардхаджива» («джива» — хорда), кийинчирээк жөн эле «джива» деп аташкан. Арабдар бул сөздү «томпоктук» деп аташкан, алар «джайб» деген сөздү которуп алышкан. «Джайб» деген сөз XII кылымда латынча сөзмө- сөз «sinus» дегенди түшүндүрөт. Индиялыктар косинусту «котиджива» , б. а. калдыктын синусу (айлананын чейреги). Латынча «sinus complementi» (кошумча синус) деп, sin(90° —x) ты түшүнүшкөн. Бул сөздөрдү орун алмаштырып, бирин кыскартканда (co-sinus) «косинус» термини пайда болгон.

499-жылы 24 жаштагы Ариабхатта жазган, «Ариабхаттиам» трактатында синус, косинус, жана синус-версустар кездешет.

«Синус-версус» (DA) айлананын радиусу жана анын косинусунун айырмасы: Биздин термин менен жазсак:

$$\sin \operatorname{vers} a = 1 - \cos a.$$



30-сүрөт.

Индиялыктар бул чоңдуктарды жалаң гана тар бурчтар үчүн карайт. Бул эсептөөлөр жалаң гана тик бурчтуу үч бурчтуктарда жүргүзүлгөн. Эгерде тик бурчтуу үч бурчтук болбосо, аны тик бурчтуу үч бурчтуктарга бөлүшкөн. Ошондой эле тригонометриялык чоңдуктардын ортосундагы жөнөкөй катыштарды билишкен.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha) = \sin\alpha.$$

Синустардын таблицасы индиялык математиктер аркылуу берилген.

IX—X кылымда ислам мамлекеттеринин окумуштуулары (ал-Хабаш, ал-Баттани ж.б.) жаңы тригонометриялык чоңдуктарды: тангенс, котангенс, секанс жана косекансты киргизишет.

Ал-Хорезмдин замандашы Ахмед ал-Мервазини (Мервада төрөлгөн) ал-Хабаш ал-Хасиб (Эсептөөчү) деп аташкан. Ал «гномоника» менен «күн сааты» окуусу менен иш жүргүзгөн. Бул ошол убактагы адамдар убакытты өлчөгөн алгачкы курал болгон. Ал-Хабаш тангенс жана косеканс түшүнүктөрүн күн саттарына байланыштырып берген. Бул чондуктарды тез эле гномоникадан тышкары пайдалана башташтты.

Ал-Баттани (болжол менен 850—929-жылдар) өзүнүн астрономиялык «Алмагестти өркүндөтүү» деген трактатында, тик бурчтуу үч бурчтуктун тар бурчу бир катетинин экинчи катетине болгон катышы аркылуу аныктала тургандыгын аныктаган. Бул эмгегинде алты тригонометриялык чондукту аныктайт: синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс жана косеканс. Азыркы жазуулар менен жазсак төмөндөгүлөрдү берет.

$$\frac{ctg\alpha}{r}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\frac{tg\alpha}{r}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$\frac{\sin\alpha}{r}=\frac{r}{\operatorname{cosec}\alpha};$$

$$\frac{\cos\alpha}{r}=\frac{r}{\sec\alpha};$$

$$r\sec\alpha=\sqrt{r^2+r^2tg^2\alpha}:$$

$$r\operatorname{cosec}\alpha=\sqrt{r^2+r^2ctg^2\alpha}:$$

$$\frac{\sin\alpha}{r}=\frac{tg\alpha}{\sec\alpha}.$$

Эгерде r=1 ди алсак анда азыркы формулаларды алабыз.

Атактуу философ, астроном жана математик ал-Бируни 973-жылы Хорезмден төрөлгөн, тригонометрия илимине чоң салым кошкон.

«Хордалар жөнүндөгү китеп» деген математикалык китебинде ал-Бируни айрым сүйлөмдөрдү далилдөөлөрдүн өзүнөн мурдагы окумуштууларда болгон ар түрдүү жолдорун салыштырып чыккан.

Ал мындай деп айткан: «Окуучу, мен мунун бардыгын сен үчүн чогулттум жана өзүмдүн адатым боюнча ар бир далилдөөнү өзүнүн авторуна таандык кылып көрсөттүм, муну сени өз көзү менен көрсүн жана алардын бардыгы бир чекитке бириге тургандыгын түшүнсүн деп, хордаларды үйрөтүү үчүн мындан эмнелерди чыгарып алуу керек экендигин сен өзүң чечкин деп иштедим».

X кылымдын аягында Багдадда жашаган улуу математик Абу-л-Вафа биринчи жолу тригонометриялык функцияларды тик бурчтуу үч бурчтуктар эмес, айланалар менен аныктайт. Мисалы тангенсти айланага жүргүзүлгөн кесинди катары аныктайт. Кээ бир учурларда бирдик айлананы алат.

XII кылымдан баштап, арабча жазылган эмгектерди латын тилине которгон учурда жаңы терминдер пайда боло баштайт.

Тангенс, секанс терминдерин 1583-жылы немец математиги Т. Финик аркылуу киргизилген, Ал геометриялык сүрөттөлүш аркылуу берилген. «тангенс» — жануучу (жанымадагы кесинди), «секанс» — кесүүчү (кесүүчүдөгү кесинди). Ал эми «котангенс» жана косеканс» терминдери «косинус» терминине окшоштурулуп айтылган. Бул терминдер XVII кылымдын биринчи жарымынан баштап, толук пайдаланыла баштаган.

Тригонометриядагы эң так таблицалар ал-Каши тарабынан XV кылымдын башында түзүлгөн. Регимонтон (1436—1476) жана Европалык окумуштуулар XVI—XVIII кылымдарда түзүшкөн.

Монгол султаны Темирландын небереси — Улугбек (1393—1449), өзү ири астроном, Самаркандда ошол убакыт үчүн бүткүл дүйнөдөгү эң сонун обсерваторияны куруп, астрономия менен математикалык илимдерди иштеп чыгуу үчүн эң атактуу окумуштууларды чогулткан жана эң ири ачылыштарды ачышкан.

Бул обсерваториянын биринчи директору Джемшид бен Масуд эд-Дин ал-Каши деген өзбек болгон, ал болжол менен 1436-жылы каза болгон. Математикалык илимдерге анын салымы өтө зор болуу менен тригонометриялык эсептөөлөрдү өркүндөткөн.

Француз математиги Жиля Персона де Роберваля XVII кылымдын 30-жылдары циклоиддин аянтын табууда тригонометриялык функциялардын графиктеринен биринчи болуп синусоиданы сызат.

Англиялык математик Джеймс Грегори 1668-жылы тангенсоиданын бир бөлүгүн чийип «геометриялык этюддарга» чыгарган.

1670-жылы англиялык математик Джон Валлис өзүнүн «Механика» деген китебинде синусоиданын эки кайталанышын көрсөтөт жана анын чексиз кайталана тургандыгын айтат. Ошондой эле секанстын графигин чийет, бирок ал так болбой калган. Ушул эле жылы англиялык улуу математик Исаак Барроунун (И. Ньютондун мугалими) «Геометриядан лекциялар» китеби жарык көрөт. Мында косинустун, тангенстин жана косеканстын графиктери биринчи квадрант үчүн берилет.

Функциялардын графиктерин, анын ичинен тригонометриялык фунциялардын графиктерин сызуу Декарттын «Геометрия» китеби чыккандан кийин жана аналитикалык геометриянын өнүгүшүнөн кийин кеңири колдонула баштады. Тригонометриялык функциялардын графиктерин сызуу көп жылдаган изилдөөлөрдү талап кылды. Тригонометриянын өнүгүүсү Леонид Эйлердин эмгектерине тыгыз байланыштуу.

6.3. ТРИГОНОМЕТРИЯНЫН ФОРМУЛАЛАРЫ

Птоломей (II кылым) эки бурчтун жаасынын айырмасын жана суммасынын формуласын чыгарат. XII кылымда Индиянын окумуштуулары анын ичинде Бхаскара, азыркы символдор менен жазганда төмөндөгү формулаларды пайдаланат.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{R} \qquad (1)$$

мында R — айлананын радиусу. Бул формулаларды Азиянын жана Европанын окумуштуулары орто кылымда пайдаланышкан.

$tg(\alpha+\beta)$, $\sec(\alpha+\beta)$ сумманын тангенсинин жана секансынын жалпы эрежелерин биринчи жолу 1706-жылы Петербургдук математик Я. Герман берген.

Птолемей хордалардын таблицасын түзгөндө, ал синустун жарым жана кош бурчтары, эки бурчтун суммасы жана айырмасын киргизет.

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} \qquad (2)$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha \qquad (4)$$

Индиялыктар (2) формулага эквиваленттүү болгон (5) формуланы колдонушкан.

$$\sin^2\alpha + \sin vers^2\alpha = (2\sin\frac{\alpha}{2})^2 \qquad (5)$$

Ошондой эле кош аргументтин синусунун формуласын билишкен. Абу-л-Вафа төмөндөгү формуланы киргизген:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \qquad (6)$$

Ушул жана башка кош аргументтин жана жарым аргументтин синус жана косинустарынын формулалары орто кылымдагы көп окумуштуулардын эмгектеринде кездешет.

XVII кылымда англиялык окумуштуу Джон Пелль жана француз окумуштуусу ар кандай жолдор менен

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \quad (7)$$

формуласын далилдешкен.

Көп кылымдар бою окумуштуулар тригонометриялык функциялардын көбөйтүндүлөрүн суммага жана тескерисинче өзгөртүүнүн үстүнөн иштеп келишкен. XVI кылымда Кеплердин ишин улантуучулардын бири датчандык окумуштуу Тихо Браге көбөйтүндүнү суммага алмаштыруу

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] \quad (8)$$

формуласын биринчилерден болуп пайдаланган.

6.4.ТРИГОНОМЕТРИЯНЫН ӨНҮГҮҮСҮ ЖАНА СИМВОЛДОРУНУН ПАЙДА БОЛУШУ

Тригонометрияда символдорду пайдалануу XVII кылымда башталды. Тригонометрияны сөз түрүндө жазуудан алгебралык түрдө жазууга өтүү узак убакытты талап кылды.

Англиялык математик Р. Норвуд (1570—1675) өзүнүн «Тригонометрия жана үч бурчтуктар жөнүндөгү окуу» деген эмгегинде төмөндөгү белгилөөлөрдү пайдаланат: s — синус, t — тангенс, sec — секанс, cs же sc — косинус, ct же tc — котангенс.

Дж. Валлис 1684-жылы жарык көргөн эмгектеринде төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү пайдаланат: S — синус, $\sum$ — косинус, T — тангенс, — τ котангенс.

Л. Эйлер (1707—1783) тригонометриянын өнүгүүсүнө чоң салым кошуу менен төмөнкү эмгектерди жараткан

Ал биринчилерден болуп, тригонометриялык функциялардын белгилери жөнүндөгү маселени коюп, аны туура чечүү менен келтирүүнүн формулаларын берген. Тригонометриялык функциялардын аныкталуу областын аныктоо менен аларды sinx, cosx, tangx, cotx символдору менен белгилейт. Каалагандай ΔABC нын A, B, C бурчтарынын карама-каршысында жаткан жактарын тиешелүү түрдө a, b, c тамгалары менен белгилөө менен тригонометрияда бирдей символдорду пайдаланууну сунуш кылат.

Л. Эйлер тригонометриядагы мурдагы берилген формулалардагы R дин ордуна R=1 ди пайдалануу менен эсептөөлөрдү жеңилдетип, азыркы түргө алып келет.

1748-жылы жарык көргөн «Чексиздердин анализине киришүү» китебинде Эйлер биринчи жолу синус, косинус ж.б. ларды сөзсүз түрдө айлана менен байланышкан тригонометриялык сызык катары эмес, тик бурчтуу үч бурчтуктун жактарынын катышы, сандык чондук катары карайт. Ушул китебинде кош аргументтин котангенсинин формуласын биринчи болуп берет.

$$ctg2\alpha = \frac{1}{2}(ctg\alpha - tg\alpha)$$

Тригонометриялык функциянын аргументин бурч же жаа катары эмес, ар кандай сандык чоңдук катары кароо менен, Эйлер тригонометрияны аналитикалык жол менен бере баштайт.

Эйлерге чейин тригонометриялык функциялардын жаалары π ге чейин эле каралуучу. Ал эми анын эмгектеринде тригонометриялык функциялардын каалагандай аргументтери каралат.

Тригонометрия түшүнүгүнүн жалпы кабыл алынышы, тригонометриялык функциялардын аныктамасынын калыптанышы жана улам символдордун жакшыртылышынын натыйжасында эсептелүүчү маселелерди чыгаруу үчүн тригонометрия азыркы эң ыңгайлуу түргө келди.

6.5. ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫК КАТАРЛАР

Тригонометриялык катар 1744—1748-жылы Л. Эйлердин эмгектеринде пайда болгон.

$$\frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}=1+r\cos x+r^2\cos 2x+...$$

$$\frac{\pi-x}{2}=\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+...$$

Ошондой эле Эйлер даражалуу катар менен тригонометриянын ортосундагы байланышты көрсөткөн: Эгерде

$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ жана C_n чыныгы сан болсо, анда

$R_e f(e^{ix})=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cos nx$ болот. Мында $R_e f$ аркылуу функциянын чыныгы бөлүгү белгиленет.

А. Клеро 1757-жылы коэффициенттер үчүн формуланын ажыралышын берет.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad n=1,2,...$$

Функциялардын тригонометриялык катарга ажырай тургандыгын Д. Бернулли, Ж. Фурье функцияларды ажыратуу менен көрсөтүшкөн. Ошондой эле Ж. Фурье жылуулук өткөрүмдүүлүк маселелерин чыгарууда тригонометриялык катарларды системалуу пайдаланган. Андан кийинки изилдөөлөр С. Пуассон, М. В. Остроградский, П. Дирихле Г. Риман А. Лебег ж. б. ларга таандык.

VII Бөлүм

ТАРЫХЫЙ МАСЕЛЕЛЕР

7.1. ТАРЫХЫЙ КЫЗЫКТУУ МАСЕЛЕЛЕР ЖАНА ОЮНДАР

Ахместин папирусунан баштап, ар кандай математикалык маселелердин арасында кызыктуу, көңүл ача турган маселелерди кезиктиребиз. Ахместин папирусунан № 79 маселе, байыркы кызыктуу маселелерге кирет. Ал төмөндөгүдөй окулат:

Кат (жазгыч)	7	Чыгаруу
Мышык	49	. 2801
Чычкан	343	. .5602
Арпа	2401	. . .11204
Дандын чени	16807	бардыгы 19607

Автор геометриялык прогрессиянын суммасын тапкандыгы көрүнүп турат. 2801х7=19607. Прогрессиянын бөлүмү биринчи мүчөгө барабар болгон учур.

Магницкийдин «Арифметикасында» «математикалык көңүл ачуулар» сандарды, күндөрдү табуу, буюмдардын жайланышуусу табуу маселелерден турат. Бул маселелердин бардыгы сандарды эсептөөгө байланышкан.

1. «Шакекти табуу оюну».

Катышуучулардын бири шакекти манжасынын бирине салат.

Шакек, кимде, кайсы манжасында жана кайсы муунунда экендигин табуу талап кылынсын.

Оюндун жүрүшү.

Шакек бешинчи кишинин үчүнчү манжасынын экинчи муунунда болсун.

Табуучу олтургандарга төмөндөгү эсептөөлөрдү аткаруусун суранат:

1) олтурган номерин 2 ге көбөйтүү;

$$5 \cdot 2 = 10$$

2) көбөйтүндүгө 5 ти кошуу;

$$10 + 5 = 15$$

3) сумманы 5 ке көбөйтүү;

$$15 \cdot 5 = 75$$

4) көбөйтүндүгө шакек салынган манжанын номерин кошуу;

$$75+3=78$$

5) сумманы 10 го көбөйтүү;

$$78 \cdot 10 = 780$$

6) көбөйтүндүгө шакек салынган муундун номерин кошуу;

$$780+2=782.$$

Жыйынтык таап жаткан кишиге айтылат.

Таап жаткан киши жыйынтыктан 250 ди кемитет.

$$782-250=532$$

Биринчи (сол жактан оң жакка айтылат) цифра — шакек салынган кишинин олтурган номерин, экинчи цифра — манжасынын номерин, үчүнчү цифра — муундун номерин берет.

Мында шакек 5-катарда олтурган кишинин үчүнчү манжасынын экинчи муунунда.

Магницкий бул оюндун түшүндүрмөсүн берген эмес.

Түшүндүрмөсүн төмөндөгүдөй берсек болот

Шакек № а да олтурган кишиде, анын № b манжасында жана № с муунунда салынуу болсун.

a, b, c сандары менен жүргүзүлгөн амалдарды карайлы

1) $a \cdot 2 = 2a$;

2) $2a + 5$;

3) $(2a + 5) \cdot 5 = 10a + 25$;

4) $10a + 25 + b = 10 + b + 25$;

5) $(10a + b + 25) \cdot 10 = 100a + 10b + 250$;

6) $100a + b + 250 + c = 100a + 10b + c + 250$;

7) $100a + 10b + c + 250 - 250 = 100a + 10b + c$.

2) «Бир жуманын кайсыл күнүн ойлогонун табуу».

Дүйшөмбүдөн баштап: биринчи , экинчи, ж.б.у.с. жетинчи күн — жекшемби болот.

Оюндун шарты.

Мейли бирөө, бейшембини ойлонсун.

Таба турган адам, олтургандардан төмөндөгү амалдарды аткарууну суранат:

1) ойлогон күндү 2 ге көбөйткүлө, $4 \cdot 2 = 8$;

2) көбөйтүндүгө 5 ти кошкула, $8+5=13$;

3) сумманы 5 ке көбөйткүлө, $13 \cdot 5 = 65$;

4) көбөйтүндүнүн аягына нөлдү кошуп жазып, жыйынтыгын айткыла. Жыйынтык: 650.

Таап жаткан адам, жыйынтыктан 250 дү кемитет,

$$650-250=400.$$

Негизделиши жогорудагы маселенин негизделишиндей.

3) Магницкийдин геометриялык прогрессияга, бөлүмү 2 болгон учурга кызыктуу маселеси бар.

«Бир адам атын 156 сомго сатты, сатып алган киши кайра айнып: «Мындай начар атты ушунча кымбатка алууну каалабаймын», деп атты ээсине кайтармакчы болот

Анда аттын ээси башкача баа коюп мындай дейт: «Эгерде бул аттын баасын кымбат дей турган болсоң анда мыктарды сатып алгын, ал мыктар бул аттын такаларында бар, аттын өзүн болсо, ошол сатып алган алган мыктардын үстүнө бекер эле кошумча кылып ал. Ар бир такада 6 дан мык бар, бир мыкка бир полушка (полушка — $\frac{1}{4}$ тыйын), экинчисине эки полушка, ал эми үчүнчүсүнө бир тыйын жана калгандарына ушул сыяктуу улам арттырып төлөгүнүн.

Сатып алуучу болсо, мындай арзыбаган наркты көрүп, атты бекер алгысы келди, ал мыктарга 10 сомдон ашпаган акча төлөөрмүн деп ойлоп, ошондой наркка макул болду. Сатып алуучу канча акча төлөгөн?

Сатып алуучу 4178703 $\frac{3}{4}$ тыйын төлөй турган болгон.

Геометриялык прогрессиянын суммасынын формуласы менен табыла тургандыгын текшерсе болот. Мында бөлүмү экиге барабар.

Магницкий өзүнүн кызыктуу математикалык оюндары жана кызыктуу маселелер менен окурмандардын акылын такшалтууну көздөгөн.

Орустун байыркы кызыктуу маселелеринен карайлы.

XVII кылымдын кол жазмасынан:

«Арстан койду бир сааттын ичинде жеди, карышкыр болсо койду эки саатта жеп бүттү, ал эми ит койду үч саатта жеди. Үчөөсү биригип — арстан, карышкыр жана ит койду бирге жей баштады, үчөө канча убакытта жеп бүтөөрүн эсептеп чыккыла».

Кол жазманын автору чыгаруунун төмөндөгүдөй жолун сунуш кылат: 12 сааттын ичинде арстан 12 кой, карышкыр 6 , ал эми ит 4 кой жешет демек бир сааттын ичинде алар $\frac{22}{12}=\frac{11}{6}$ кой жешет, ал эми бир койду бардыгы биригип $\frac{6}{11}$ саатта жешет.

Бул маселе XVII кылымдын кол жазмаларында бар. Ал шахматты ойлоп чыгаруучу жөнүндөгү маселеге окшош, ал адам аз эле акы алууга — атап айтканда, ага шахмат тактасынын биринчи клеткасына бир дан, экинчисине — эки дан, үчүнчүсүнө — төрт дан жана ошентип, клетка сайын дандардын санын эки эсе көбөйтүп берүүнү суранган.

Көрсө, бул шартты орундатуу үчүн жер шаарынын бүткүл кургак жеринен 28 эсе ашкан аянттан жыйнап алынган мол түшүм талап кылынат экен.

Башкача айтканда:

$$1+2+2^2+2^3+...+2^{63}=2^{64}-1.$$

Азыркы учурда «кызыктуу маселелер», «математикалык оюндар« жана математикалык баш катырмалар китептеринин авторлорун айтып кетсек болот.

Я. И. Перельман «Кызыктуу арифметика» китеби 1926-жылы чыккан. Андан кийин ушул эле багытта бир нече статьялары жана жыйнактары жарык көргөн. Төмөндөгү маселелерин карайлы.

1. Кишинин башында орто эсеп менен менен 150 000 ге жакын чач бар. Орто эсеп менен, бир айда 3000 ге жакыны түшөт. Ар бир чач кишинин башында канча убакыт кармалып тура тургандыгын эсептегиле.

Чыгарылышы: Бүгүнкү күндө кишинин башында болгон 150 000 чачтын 3 миңи биринчи айда түшөт. биринчи эки айда — 6 миңи, биринчи жылдын ичинде 36 миңи түшөт. Демек акыркы чач түшүш үчүн төрт жылдан ашыгыраак убакыт керек. Кишинин башындагы чач орто эсеп менен 4 жылдан ашыгыраак жашайт.

2. Баш катырманы жакшы көргөн бир кишиден канча жашта экендигин сурашкан кезде, мындай деп жооп берген: «Үч жылдан кийинки менин жашымды үч эсе көбөйтүп, андан үч жыл мурда болгон жашымдын үчкө болгон көбөйтүндүсүн кемиткиле, ошондо так менин жашым келип чыгат». Ал азыр канча жашта?

Чыгарылышы: Бул маселе теңдеме түзүү менен оңой эле чыгарылат. Изделүүчү жашты x менен белгилесек:

$$3(x+3)-3(x-3)=x, \text{ мындан } x=18.$$

Ошондой эле ар кандай математикалык кызыктуу аңгемелер берилген. Мисалы: «Шаардык кабарлар» аңгемесин карайлы.

Борбордо жашаган бир адам калкы 50 000 болгон кичине шаарга эртең менен 8 де келип, өзү түшкөн үйдөгү жергиликтүү 3 адамга жаңылыкты айтат. Ошенти эртең менен саатта жаңылык 4 адамга белгилүү болгон Бул жаңылыкты билген үч адамдын ар бири чейрек сааттын ичинде, үчтөн адамга айтып берүүгө шашты. Демек, ар бир чейрек саатта жаңылыкты билген ар бир адам башка үч адамга айтып берүүгө үлгүрсө, анда кабардын таралышы төмөндөгүчө жүргүзүлөт.

$$8\frac{1}{4}\text{с.} \to 1+3=4(\text{адам}).$$

$$8\frac{1}{2}\text{с.} \to 4+(3\cdot 3)=13(\text{адам}).$$

$$8\frac{3}{4}\text{с.} \to 13+(3\cdot 9)=40(\text{адам}).$$

$$9\text{с.} \to 40+(3\cdot 27)=121(\text{адам}).$$

$$9\frac{1}{4}\text{с.} \to 121+(3\cdot 81)=364(\text{адам}).$$

$$9\frac{2}{4}\text{с.} \to 364+(3\cdot 243)=1093(\text{адам}).$$

$$9\frac{3}{4}\text{с.} \to 1093+(3\cdot 729)=3280(\text{адам})$$

$$10\text{с.} \to 3280+(3\cdot 2187)=9841(\text{адам}).$$

$$10\frac{1}{4}\text{с.} \to 9841+(3\cdot 6561)=29524(\text{адам}).$$

Ошентип, күндүзгү саат он жарымга жетпей шаардын калкынын бардыгы, эртең мененки саат 8 де бир гана кишиге белгилүү болгон жаңылыкты угушат.

А. П. Доморяд «Математикалык оюндар жана көңүл ачуулар» китебинде арифметикалык эсептөөгө арналган,кызыктуу маселелери бар. Мисалы: «Карта менен болгон фокус».

Бирөөгө 36 картанын ичинен бирин сууруп алууну сунуш сунуш кылып, калган карталарды биринин артынан экинчисин бат карап чыгып, суурулуп алынган картанын атын билүүгө болот. Кароодо карталардын кайсынысы бар экендигин эске тутууга аракет кылуунун кереги жок. Калган карталардагы очколордун суммасын суммасын табуу жетиштүү болот. Тузду 1 деп эсептеп, S үчүн $190 \leq S < 200$ гө ээ болобуз. Санаган кезде бирдик цифраларды гана кошуу керек. Эгерде $S=193$ болсо, анда жетилик суурулуп алынган болот. Ал эми картанын түрүн экинчи жолу карап чыкканда жеңил эле аныктоого болот.

Азыркы кезде көп авторлордун математикалык баш катырмалар, кызыктуу маселелер боюнча колдонмолору жарыкка чыккан.

7.2. ЧЫГАРУУГА СУНУШ КЫЛЫНУУЧУ МАСЕЛЕЛЕР

АРИФМЕТИКА БОЮНЧА МАСЕЛЕЛЕР

1. Улуу математик Архимед, биздин доорго чейин 212-жылы 75 жашка чыкканда каза болгон. Архимед биздин доорго чейин канча жыл мурда төрөлгөн?

2. Ахместин папирусунан маселе:

Жети кишинин жетиден мышыгы бар;
Ар бир мышык жетиден чычкан жейт;

Ар бир чычкан жетиден машак (баш) жейт;
Ар бир машактан (баштан) жетиден дан чыкмак;
Бул катар кандай жана суммасы канча?

3. Жогорудагыга окшош, орустун элдик маселеси.

Жети чал баратат,
Ар бир чалдын жетиден балдагы бар;
Ар бир балдакта жетиден бутак бар;
Ар бир бутакта жетиден баштык илинген;
Ар бир баштыкта жетиден токоч бар;
Ар бир токочтун ичинде бирден чымчык бар.
Бардыгы канча?

4. Улуу немец математиги К. Гаусс (1777—1855) бала кезинде эле математикага жөндөмдүүлүгү байкалган. Мугалим мектепте окуучуларга «1 ден 100 гө чейинки сандарды кошууну» тапшырма берет. Бир минута өтө электе кичинекей Гаусс 5050 гө барабар деп жооп берди. Кандайча иштедиң? деген суроого, төмөндөгүдөй жооп берди: «Катардын чекелеринен бирдей аралыкта жайланышкан ар бир түгөй сандын (мисалы: 1 жана 100; 2 жана 99; 3 жана 98 ж.б.у.с.) суммасы 101 ге барабар аны 50 гө көбөйтүү керек».

Ушул эле жол менен 1 ден 150 гө чейинки сандардын суммасын тапкыла.

5. Магницкийдин «Арифметикасынан»

Бир суткада 24 саат, бир жылда 365 күн. Эгерде бир жылда же бир жумада же 1000 суткада канча саат бар экендигин билгиң келсе, анда көбөйт.

6. Магницкийдин «Арифметикасынан»

Бир киши өзү жалгыз чоң чака сууну 14 күндө ичип бүтүрөт,ал эми аялы экөө ошол эле чоң чакадагы сууну 10 күндө ичип бүтүрүшөт. Аялы өзү жалгыз чоң чакадагы сууну канча күндө ичип бүтүрөт?

7. Магницкийдин «Арифметикасынан».

Бир адам бир жылга кызматкер жалдап, ага 12 сом акча жана тон берүүгө убада берет. Бирок ал 7 ай иштегенден кийин кеткиси келип, тон менен бирге ага тийиштүү акчасын берүүнү сурайт. Кожоюну анын тиешелүү кызмат акысына 5 сом жана тонду берди, ошондо тон канчага бааланып берилгенин тапкыла.

8. 120 санынын бөлүүчүлөрүнүн санын жана бөлүүчүлөрүнүн суммасын тапкыла.

9. 135 сандарынын бөлүүчүлөрүнүн санын жана бөлүүчүлөрүнүн суммасын тапкыла.

10. 8128 санынын жеткилең сан экендигин текшергиле.

11. 03335336 санынын жеткилең сан экендигин далилдегиле.

12. П. Л. Чебышев тарабынан каалагандай n натуралдык саны менен анын эки эселенген көбөйтүндүсүнүн (2n) ортосунда жок дегенде бир жөнөкөй сан жата тургандыгы далилденген. Натуралдык сандардын бул касиетин 2 ден 10 го чейинки ар бир натуралдык сан үчүн текшергиле.

13. Ахместин папирусунда 8 жана 9 нанды 10 кишиге тепе-тең бөлүүнү талап кылган. Египеттиктердин ыкмасы менен бөлгүлө.

14. «Ахместин папирусунан маселе».

Малчы 70 өгүзү менен келди. Андан — «Сен көп сандаган малдардын ичинен канчасын айдап келдиң?» деп сурашат.

Малчы мындайча жооп берет:

— Мен малдардын $\frac{1}{3}$ бөлүгүнүн $\frac{2}{3}$ бөлүгүн айдап келдим.

(Малдардын ичинде өгүз канча экендигин билгиле.)

15. $\frac{16}{25} \cdot \frac{4}{5}$ жана $\frac{21}{45} : \frac{7}{9}$ XIII кылымдагы автор- лордун аткарган жолу менен бөлүүнү аткаргыла. Текшерүүнү азыркы жол менен жүргүзгүлө. Жыйынтыгын негиздегиле.

16. Иран окумуштуусу Бехаэддиндин (XVI кылым) маселеси: 10 санын экиге бөлгүлө. Эки сандын айырмасы 5 ке барабар болсун.

17. Акмим папирусунан (VI кылым) маселе.

Бирөө бекитилген байлыктын $\frac{1}{13}$ бөлүгүн алды.

Экинчиси калганынын $\frac{1}{17}$ син алды. Ошондо 150 калды. Ошондо мурда канча эле?

АЛГЕБРА БОЮНЧА МИСАЛДАР ЖАНА МАСЕЛЕЛЕР

«Москва папирусунан»

18. $x - \frac{1}{5}x = 20.$

19. $(1 + \frac{1}{2})x + 4 = 10.$

20. $2x + x = 9.$

«Ахместин папирусунан»

21)$x + \frac{1}{5}x = 21.$

22)$3x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x = 1.$

Диофанттын «Арифметикасынан».

$$23. \frac{x+100}{x+20} = 3.$$

$$24. \frac{100-x}{20-x} = 6.$$

$$25. (b+x)a = \frac{(a+b)x+(a+x)b}{2}.$$

$$26. x+y=a, \quad x-3y=b.$$

Араб математиги жана астроному ал-Караджинин алгебрасынан (X—XI кылым).

$$27. x+y=10, \qquad \frac{x}{y} = 1\frac{1}{5}.$$

$$28. x+y=2y, \qquad y+1=3x.$$

Диофанттын «Арифметикасындагы» теңдемелер системасы.

$$29. \begin{cases} x+y)=20 \\ x^2+y^2=208 \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x=3y \\ x^2+y^2=5(x+y) \end{cases}$$

1

$$31. \begin{cases} x=3y \\ y^2=6x. \end{cases}$$

Ал-Хорезмдин алгебрасынан.

32. $\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 21 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 40 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 - y^2 = (x - y) + 54. \end{cases}$

АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ БОЮНЧА МИСАЛДАР ЖАНА МАСЕЛЕЛЕР

35. Эйлердин маселеси: $x^y = y^x$ теңдемесинен x жана y тин рационалдык маанилерин тапкыла.

36. **Ж. Л. Бертрандын «Алгебрасынан»** (1822—1900).

6 саны 729 санынын логарифми болсо, анда негизи эмнеге барабар?

37. Гольдбахтын маселеси.

a жана b оң жана бүтүн сан болгондо $\frac{1}{(a+1)^{b+1}}$ түрүндөгү бөлчөктөрдүн суммасынын предели 1ге барабар экендигин далилдегиле.

Л. Эйлердин маселелери

38. $e^x\ x^n$ дин туундусун тапкыла.

39. x^2+3x+2 үч мүчөсү кандай шарттарда эң чоң жана эң кичине маанилерге ээ болот?

40. Эсептегиле: $\int dx\, arc\, Sin\, x, \quad \int xdx\, arc\, Sin\, x.$

41. $xdx + ydy = xdy - ydx$ бир тектүү теңдемесинин интегралын тапкыла.

Лейбництин маселелери.

42. $m^5 — m$ дин 5 ке бөлүнө тургандыгын көрсөткүлө.

43. $m^7 - m$ дин 7 ге бөлүнө тургандыгын көрсөткүлө.

44. Муаврдын маселеси.

Бардык так даражалуу кайтарылуучу теңдеме $x = -1$ тамырга ээ болот, теңдеменин эки жагын тең $x+1$ ге мүчөлөп бөлгөндө кайра эле даражасы бирге кем болгон кайтарылуучу теңдеме алына тургандыгын далилдегиле.

45. Ж. Озанаманын маселеси.

Жети дос түшкү тамак ичүүгө чогулушат жана ким кандай олтурат деп талашып-тартышып калышат. Кимдир бирөөсү ким кандай турса ошондой олтуруусун сунуш кылат. Эртеси күнү да ушул жерге келип, башкача олтуруусун, ошентип олтуруп, ар кандай болуп олтурууга мүмкүн болбой калганда гана түшкү тамакка келүүнү токтотолу деп айтат. Бул максат үчүн достор канча жолу түшкү тамак ичүүсү керек?

ГЕОМЕТРИЯ БОЮНЧА МАСЕЛЕЛЕР

Евклиддин 1-китебинен.

46. Берилген түз сызыктуу бурчту тепетең бөл.

47. Берилген чектелген түз сызыкты(кесиндини) тепетең бөл.

48. Евклиддин 3-китебинен.

Берилген тегеректин борборун табуу.

49. Архимеддин маселеси.

Квадраттын сыртына сызылган тегеректин аянты, ошол тегеректин ичине сызылган квадраттын аянтынан эки эсе чоң экендигин далилдегиле.

50. Ал-Караджинин маселеси.

Аянты 100 гө барабар болгон тегеректин диаметрин табуу.

51. Стюарттын теоремасы.

Ар кандай D чекити ABC үч бурчтугунун BC негизинде жатсын жана BD=m, CD=n, AD=d. Анда төмөндөгү байланыш орун алат.

$$d^2a = b^2m + c^2n - amn, \qquad a.b.c -$$

үч бурчтуктун жактары.

Далилдегиле!

Бул теорема шотландиялык математик М. Стюарт (1717—1785) тарабынан 1746-жылы берилген. М. Стюартка анын мугалими Р. Симсон теорема жөнүндө айткан, ал мугалиминен үч жыл мурда басмага берип чыгарууга жетишкен.

52. Стюарттын теоремасын үч бурчтуктун медианасын жана биссектрисасын табууда пайдалануу.

53. Г. Монждун маселеси (1746—1818).

Тетраэдрдин карама-каршы кырлары аркылуу параллель тегиздиктер жүргүзүлгөн. Тетраэдрдин көлөмүнүн, пайда болгон сырттан сызылган параллелепипеддин көлөмүнө болгон катышын тапкыла?

ТРИГОНОМЕТРИЯ БОЮНЧА МАСЕЛЕЛЕР

XVI кылымдын атактуу астроному датчандык Тихо Браге каалагандай үч бурчтуктун жактары жана бурчтарынын арасындагы байланышты көрсөткөн эки формуланы берген. Бул байкоолордун жыйынтыгы, убагында Кеплерге өзүнүн атактуу планеталардын кыймылы жөнүндөгү законун ачууга мүмкүнчүлүк түзгөн.

Тихо Брагенин формулалары.

54. Далилдегиле: $tgC = \dfrac{a\sin B}{a - \cos B}$.

55. Далилдегиле: $tg(B+C) = \dfrac{a\sin B}{a(\cos B - C)}$.

Виеттин формулалары.

56. Далилдегиле:
$\cos mx = 2\cos x \cos (m-1)x - \cos(m-2)x.$

57. Далилдегиле:
$\sin mx = 2\cos x \sin (m-1)x - \sin(m-2)x.$

58. Далилдегиле:
$\sin mx = 2\sin x \cos (m-1)x + \sin(m-2)x.$

59. Далилдегиле:
$\cos mx = 2\sin x \sin (m-1)x + \cos(m-2)x.$

Эйлердин формулалары.

60. Далилдегиле:
$\sin (300^\circ + z) = \cos z - \sin(300^\circ - z).$

61. Далилдегиле:
$\cos (300^\circ + z) = \cos(300^\circ - z) - \sin z.$

ЖООПТОР

1. 287ж. **2.** 7, 49, 343, 2401, 16807. 19607. **3.**: 137 256.

6. 35 күндө. **7.** 480 тыйын. **17.** $172\frac{21}{32}, \frac{21}{32}$, бирдик бөлчөктөр

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{48}, \frac{1}{96},$$

23. $x = 20.$

24. $x = 4.$

25. $x = \dfrac{ab}{2b - a}$

26. $x = \frac{3a+b}{4}$; $y = \frac{a-b}{4}$.

27. $x = \frac{60}{11}$; $y = \frac{50}{11}$.

28. $x = y = \frac{1}{2}$.

29. $x=12$, $y=8$.

30. $x=6$, $y=2$.

Диофант (2) теңдемеде $y=p$, $x=3p$ деп белгилеп алып, төмөндөгүдөй чыгарган:

$$9p^2 + p^2 = 5(3p+p)$$

$$10p^2 = 20p$$

$p=2$, мындан $x=6$, $y=2$.

31. $x=54$, $y=18$. **32.** $x=7$, $y=3$. **33.** $x=7$, $y=3$.

34. $x=7$, $y=3$.

35. Көрсөтмө:

$$y = ax,$$

$$(ax)^x = x^{ax}$$

$$a = x^{a-1}, \quad x = a^{\frac{1}{a-1}}, \text{анда} \quad y = a^{\frac{a}{a-1}}.$$

36. 3.

37. b га бирден баштап, ирети менен $n \in N$ маанини берели. Анда изделүүчү сумма төмөндөгү түрдө берилет:

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+1)^3} + \frac{1}{(a+1)^4} + \ldots$$

a га дагы, ирети менен $n \in N$ маанини берсек сумма төмөндөгүгө барабар болот.

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots \quad (1)$$

Мында катар чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиялардын суммасынан турат.

Биринчи прогрессиянын суммасы $\frac{1}{1{\cdot}2}$ ге барабар, экинчиники $\frac{1}{2{\cdot}3}$ ж. б. у. с. Анда (1) катар төмөндөгү түрдө жазылат.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+..., \quad (2)$$

Бирок, $\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ ж.бу.с.

Анда (2) катарга маанилерин койсок, (3) катарды алабыз.

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+... \quad (3)$$

(3) катардын биринчи n мүчөсүнүн суммасы

$$S_n=1-\frac{1}{n+1} \text{ болот.}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=1$$

38. $e^x(nx^{n-1}+x^n)$.

39. Эйлердин жообу. $x^2\ 3x+2=y$ десек, анда $\frac{dy}{dx}=2x+3$. $\frac{d^2y}{2dx^2}=1$ болот. Мындан $2x+3=0$, $x=-\frac{3}{2}$.

Бул шарт максимум же минимум боло тургандыгы $\frac{2y}{2dx^2}-1$ маанисинен билинет себеби ал x тин баардык маанисинде 0 дон чоң, анда биз минимум маанини алабыз. Эгерде $x=-\frac{3}{2}$ болсо анда $y=-\frac{1}{4}$. Эгерде x тин ордуна башка маанини берсек, анда

$y - \frac{1}{4}$ ден чоң маанини алат. x^2+3x+2 формуласынан көрүнүп тургандай ал минимум мааниге ээ болот, $x \to \pm\infty$ өсөт.

40. $x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2 - 1}.$ $\frac{1}{2}x^2\arcsin x + \frac{1}{4}x \cdot \sqrt{1 - x^2 - \frac{1}{4}\arcsin x}.$

41. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$ $y = ux$ деп белгилесек,

$$udx + xdu = \frac{1+u}{1-u}dx, \quad xdy = \frac{1+u^2}{1-u}dx.$$

Мындан төмөндөгүнү алабыз:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du - udu}{1+u^2},$$

$$\lg x = arctgu - \lg\sqrt{1+u^2} + C,$$

$$\lg x^2 + y^2 = C + arctg\frac{y}{x}.$$

42. $m^5 - m = m(m^4 - 1) = m(m^2 - 1) \pm (m^2 + 1)$. Мейли, $m = 2k$, б.а. жуп сан болсун. Анда $m^2 \pm 1 = 4k^2 \pm 1$; Эгер m 5 ке бөлүнбөсө, анда бул сан $5n \pm 1$ жана $5n \pm 2$ болот; m^2 төмөндөгү маанилерди берет. $25n \pm 10n + 1$ жана $25n^2 \pm 20n + 4$ б.а. m^2, (5+1) ге жана (5—1) ге бөлүнөт. Мындан $m^2 - 1$ же $m^2 + 1$ 5 ке бөлүнөт.

Ушул сыяктуу эле m так болгондо бөлүнө тургандыгын далилдесек болот.

43. $m^7 - m = m(m^6 - 1) = m(m^3 - 1) \cdot (m^3 + 1)$. Мейли $m = 2k$, б.а. жуп сан болсун. Эгер m, 7 ге бөлүнбөсө, анда бул сан $7n \pm 1, 7n \pm 2$ жана $7n \pm 3$ формада боло алат. Бирок, m^3 бардык учурда, (7+1) ге жана (7—1) ге бөлүнөт. Мындан $m^3 - 1$ же $m^3 + 1$, 7 ге бөлүнөт.

Ушул сыяктуу эле так болгондо бөлүнө тургандыгын далилдесек болот.

44. Бешинчи даражадагы теңдемени алалы:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

X=—1 тендеменин тамыры боло тургандыгын көрүүгө болот.

$$-a + b - c + c - b + a = 0 .$$

Эгерде теңдеменин сол жагын x+1 ге бөлсөк, анда төмөндөгүнү алабыз.

$$ax^4 + (b - a)x^3 + (c + a - b)x^2 + (b - a)x + a = 0$$

45. 5040.

46. BAC бурчун тең экиге бөлүү үчүн, Евклид AB жагынан каалагандай D чекитин алат. AE=AD боло тургандай кылып, AC жагынан E чекитин белгилейт. DE жагынан тең жактуу DEF үч бурчтугун түзөт. AF түз сызыгы BAC бурчун тең экиге бөлөт.

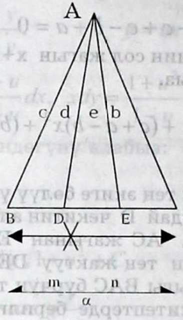
Биздин окуу китептерде берилген чыгарылыштардан айырмаланып, Евклид эки чыгарылышын берген. Үч бурчтукту DE нин эки жагына тең түзүүгө мүмкүн.

47. AB кесиндисин тең экиге бөлүү үчүн, Евклид тең жактуу ABC үч бурчтугун түзөт. Андан кийин ACB бурчун CD түз сызыгы менен тең экиге бөлөт (47-маселе), D чекити AB кесиндисинин тең ортосу.

48. Евклид карама-каршы метод менен далилдеген. Тегеректин борбору хорданын ортосуна жүргүзүлгөн перпендикулярда жатат.

50. Ал-Караджинин жообу $d^2 = \frac{1400}{11}$. Мында Архимед тарабынан көрсөтүлгөндөй $\pi = \frac{22}{7}$ деп алынган.

51. AE кесиндиси ABC үч бурчтугунун бийиктиги болсун (31-сүрөт) DE=k десек, анда ACD үч бурчтугунан, $b^2 = d^2 + n^2 — 2nk$ (1) ни, ал эми ABD үч бурчтугунан $c^2 = d^2 + m^2 — 2mk$ (2) ни алабыз. (1) ни m ге (2) ни n ге көбөйтүп, (1) ни (2) ге кошсок изделүүчү барабардык келип чыгат.



31-сүрөт

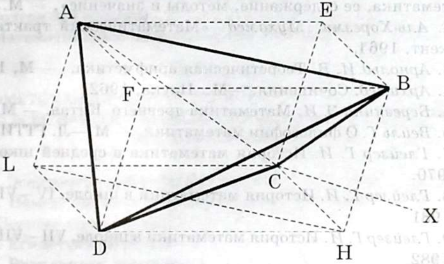
52. 1) Эгерде каалагандай D чекитинин ордуна BC кесиндисинин тең ортосу болгон M чекитин алсак, анда медиана үчүн төмөндөгү барабардыкты алабыз:

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}.$$

2) D чекитин A бурчунан түшүрүлгөн биссектрисанын негизи десек, анда биссектриса үчүн төмөндөгү барабардыкты алабыз:

$$\beta_a = \frac{2\sqrt{pbc(p-a)}}{b+c}$$, мында p — ABC үч бурчтугунун жарым периметри.

53. Көрсөтмө. Тетраэдрдин карама-каршы кырлары AB жана DC, AD жана BC, AC жана BD аркылуу бир түгөйдөн параллель тегиздиктерди жүргүзүүгө болот (32-сүрөт). $CX \parallel AB$, ны жүргүзсөк AB га параллель болгон DCX тегиздигин алабыз. AB аркылуу DCX тегиздигине параллель болгон тегиздикти жүргүзсөк, тетраэдрдин сыртынан сызылган параллелепипедди алабыз.



32-сүрөт.

Тетраэдрдин көлөмү сырттан сызылган параллелепипеддин көлөмүнөн төрт бирдей чоңдуктагы BDCH, ACDL, CAEB жана DABF пирамидалардын көлөмдөрүнүн суммасын кемиткенге барабар. Пирамидалардын ар биринин көлөмү параллелепипеддин көлөмүнүн $\frac{1}{6}$ не барабар. Эгерде пирамиданын көлөмүн V_1 менен белгилесек, анда төмөндөгүнү алабыз..

$$V = V_1 - \frac{4}{6}V_1 = \frac{1}{3}V_1,$$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{1}{3}$$

АДАБИЯТТАР

1. *Александров А. Д.* Общий метод на математику. В сб. «Математика, ее содержание, методы и значение». — М., 1956.

2. *Аль-Хорезми Мухамед* «Математический трактат». — Ташкент, 1964.

3. *Арнольд И. В.* Теоретическая арифметика. — М, 1939.

4. *Архимед.* Сочинения. —М.: Наука, 1962.

5. *Березкина Э. И.* Математика древнего Китая. — М, 1980.

6. *Вейль Г.* О философии математики. — М.—Л. ГТТИ, 1934.

7. *Глейзер Г. И.* История математика в средней школе.. — М, 1970.

8. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. IV—VI кл. — М., 1981

9. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. VII—VIII кл.— М., 1982.

10. *Глейзер Г. И.* История математики в школе IX—X кл.— М., 1983.

11. *Депман И. Я.* История арифметики. — М, 1976.

12. *Евклид.* Начала, тт.1—3. М.— Л., ГТТИ, 1948—1950.

13. *Метельский Н. В.* Очерки истории методики математики. — Минск, 1968.

14. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. — М, 1990.

15. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. В двух томах. 1989.

16. *Кольман Э.* История математики в древности. — М, 1961.

17. *Рыбников К. А.* История математики. — М, 1974.

18. *Төрөгелдиева К. М* Комбинаторика жана Ньютондун биному. — Бишкек, 2001.

19. *Төрөгелдиева К. М.* Арифметиканын өнүгүү тарыхы. — Бишкек, 2002.

20. Хрестоматия по истории математики. под редак. А. П. Юшкевича. — М, 1977.

МАЗМУНУ

2.3. НАТУРАЛДЫК САНДАРДЫН КЭЭ БИР КАСИЕТТЕРИНИН ТАРЫХЫ

2.4. БҮТҮН САНДАР ЖАНА АЛАР МЕНЕН БОЛГОН АРИФЕТИКАЛЫК АМАЛДАР

2.5. БӨЛЧӨК САНДАР

III *Бөлүм*

АЛГЕБРАНЫН ӨНҮГҮҮ ТАРЫХЫ

IV *Бөлүм*

АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ

V *Бөлүм*

ГЕОМЕТРИЯНЫН ӨНҮГҮҮ ТАРЫХЫ

VI *Бөлүм*

ТРИГОНОМЕТРИЯНЫН ӨНҮГҮҮ ТАРЫХЫ

VII *Бөлүм*

ТАРЫХЫЙ МАСЕЛЕЛЕР

Учебное издание

ТӨРӨГЕЛДИЕВА КОНУРЖАН МАКИШЕВНА

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

На кыргызском языке

Окуу китеби

ТӨРӨГЕЛДИЕВА КОНУРЖАН МАКИШЕВНА

МАТЕМАТИКАНЫН ТАРЫХЫ

Редактору *А. Жакыпбеков*
Сүрөтчүсү *Васильев И. В.*
Корректору *Сакелов А.*
Техникалык редактору *Курбанбаева М.*

ИБ 5602

Терүүгө 20.06.2003-ж. берилди. Басууга 01.07.2003 ж. кол коюлду. Форматы 84x108$^{1}/_{32}$. Кагазы офсеттик № 1. «Мектеп» ариби. Көлөмү 14,5 шарттуу басма табак. Нускасы 1000. Заказ № 222.